Характеры. Соотношения ортогональности.

Определение 1. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – представление группы G, где V – векторное пространство над полем F. Характером представления ρ называется функция $\chi_\rho\colon G \to F$ такая, что $\chi_\rho(g)$ равно следу матрицы $\rho(g)$ в некотором базисе пространства V.

Замечание 1. Поскольку при переходе к другому базису матрица оператора сопрягается, а след сопряжённой матрицы равен следу исходной, характер представления не зависит от выбранного в V базиса.

Задача 1. Характер постоянен на классах сопряжённости.

Определение 2. Пусть G – конечная группа. Введём скалярное умножение на пространстве функций $G \to F$ по формуле

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\psi(g^{-1}).$$

Задача 2. Если g – элемент конечного порядка (что всегда верно для конечных групп) и $F = \mathbb{C}$, то $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

Теорема 1. *Характеры неприводимых комплексных представлений образуют ортонормированный (относительно введённого скалярного умножения) базис пространства функций $G \to \mathbb{C}$, постоянных на классах сопряжённости.*

Определение 3. Таблица неприводимых характеров конечной группы G – квадратная таблица, в которой по строкам – классы сопряжённости, по столбцам – неприводимые представления. В клетке стоит значение характера на элементе данного класса.

Задача 3. Составить таблицы одномерных характеров групп S_3, A_4, Q_8, S_n, D_n, $\mathbb{Z}_2 \times S_3$.

Задача 4. Составить таблицы неприводимых характеров групп S_3, S_4, Q_8, D_4, D_5, A_4, $\mathbb{Z}_2 \times S_3$.

Задача 5. Найти

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g),$$

где χ – неприводимый харак4тер неединичной конечной группы G.

Задача 6. Рассмотрим представление S_n, $n = 3, 4$ в пространстве $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$. С помощью соотношений ортогональности разложите его на неприводимые.

Определение 4. Пусть G – конечная группа. Рассмотрим пространство V с базисом $\{e_g \mid g \in G\}$. Регулярное представление G – это $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho(g)(e_h) = e_{gh}$.

Задача 7. С помощью соотношений ортогональности найти с какой кратностью каждое представление G входит в регулярное представление для группы G равной $\mathbb{Z}_3$, S_3, $\mathbb{Z}_2 \times S_3$.

Задача 8. ***** Пусть χ – характер группы G. f – функция, постоянная на классах сопряжённости,
$$f(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)).$$
Докажите, что f – характер группы G.