Листок 5.

Задача 1. Разлагаются ли в прямое произведение следующие группы:
а) $\mathbb{Z}$
б) S_3
в) A_4
г) S_4
д) Q_8
е) D_n

Задача 2. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ – подгруппы абелевы группы, имеющие взаимно простые порядки. Докажите, что сумма подгрупп A_i является прямой.

Задача 3. Найдите $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Задача 4. а) Докажите, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.
б) Верно ли это утверждение для абелевых моноидов?
в) Верно ли это утверждение для неабелевых групп?

Задача 5. Пусть G – группа, H и N – ее подгруппы такие, что $N \cap H = \{e\}$. И пусть N нормальна в G. Кроме того предположим, что G есть произведение H и N. Докажите, что любой элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде nh, где $n \in N$ и $h \in H$.

Определение 1. Если выполняются условия задачи 5, группа G называется *внутренним полупрямым произведением* H и N. Обозначается это так:

$$G \cong N \leftthreetimes H.$$

Определение 2. Пусть H и N – группы. И пусть задан гомоморфизм

$$\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N).$$

Внешним полупрямым произведением групп H и N, соответствующим гомоморфизму φ, называется множество пар (n, h), где $n \in N$ и $h \in H$ с операцией умножения, заданной по правилу:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2).$$

Задача 6. Докажите, что любое внешнее полупрямое произведение является внутренним и наоборот.

Задача 7. Является ли прямое произведение частным случаем полупрямого? Если да, то какому гомоморфизму оно соответствует?

Задача 8. Разлагаются ли в полупрямое произведение своих подгрупп следующие группы:
а) $\mathbb{Z}$
б) S_3
в) S_n
г) Q_8
д) D_n
е) A_4