Лекция 1

Определение 1. Пусть G – некоторое множество. *n-арной операцией* на множестве G называется отображение

$$G \times \ldots \times G \to G$$

из n-ой декартовой степени множества G в множество G.

Рассмотрим бинарную операцию $*$ на множестве G:

$$G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \to g_1 * g_2.$$

Определение 2. Непустое множество G с фиксированной бинарной операцией $*$ называется *группоидом*.

Рассмотрим следующие условия (аксиомы) на операцию $*$.

A1. Ассоциативность. Для любых элементов $a, b, c \in G$ выполнено $(a*b)*c = a*(b*c)$.

A2. Существование нейтрального элемента. Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$.

A3. Существование обратного элемента. Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

A4. Коммутативность. Для любых элементов $a, b \in G$ выполнено $a * b = b * a$.

Накладывая на операцию $*$ различные множества условий, мы будем получать различные алгебраические структуры.

Определение 3. Если $*$ удовлетворяет условию A1, то G называется *полугруппой*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2, то G называется *моноидом*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2 и A3, то G называется *группой*.

Условие A4 добавляет к названию структуры слово абелев (или, что то же самое, коммутативный). Так условия A1 и A4 задают *абелеву (коммутативную) полугруппу*, условия A1, A2 и A4 задают *абелев (коммутативный) моноид*, условия A1, A2, A3 и A4 задают *абелеву (коммутативную) группу*.

Обозначение 1. Если не очевидно, какая операция на множестве G имеется в виду, то будем использовать обозначение $(G, *)$ для множества G с операцией $*$.

Зачастую вместо слова "операция"используют слово "умножение". Суть от этого не меняется и имеется в виду некоторая операция в группе. При этом на письме так же как и в случае обычного умножения чисел знак умножения можно опускать. Нейтральный элемент группы в этом случае зачастую называют "единицей группы". Такие обозначения называются *мультипликативными*.

Если заранее известно, что группа абелева, то часто используют *аддитивные* обозначения. Операция называется сложением и обозначается знаком ”+”, нейтральный элемент называется нулем, а обратный элемент называется "противоположным элементом".

Соберем эти обозначения в таблице.

общие обозначения	мультипликативные обозначения	аддитивные обозначения
произвольная группа	произвольная группа	абелева группа
операция $*$	умножение $\cdot$	сложение $+$
нейтральный элемент e	единица e	ноль 0
обратный элемент g^{-1}	обратный элемент g^{-1}	противоположный элемент $-g$

Определение 4. Порядок группы G – это количество элементов в этой группе. (То есть мощьность множества G.) Порядок группы G обозначается $|G|$.

Определение 5. Подмножество H группы $(G, *)$ называется *подгруппой*, если $(H, *)$ является группой.

Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно операции* $*$, если для любых $a, b \in S$ выполнено $a*b \in S$. Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно взятия обратного*, если для любого $s \in S$ элемент s^{-1} также принадлежит S.

Предложение 1. *Непустое подмножество H группы $(G, *)$ является подгруппой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции и замкнуто относительно взятия обратного.*

Доказательство. Если $(H, *)$ – группа, то операция $*$ корректно определена на H. Значит, H замкнуто относительно операции $*$. Пусть e – нейтральный элемент группы G, а s – нейтральный элемент группы H. Получаем $s*s = s$. В группе G есть обратный к s элемент s^{-1}. Умножая на него слева предыдущее равенство, получаем $s = e$. То есть единицы у групп G и H совпадают. Для каждго $g \in H$ есть обратный элемент g^{-1} в группе G и есть обратный элемент обратный элемент $g^{\vee}$ в группе H. Тогда $g * g^{-1} = e = g * g^{\vee}$. Умножив слева на g^{-1}, получаем $g^{-1} = g^{\vee}$. Поскольку для группы $(H, *)$ выполнена аксиома А3, то H замкнуто относительно взятия обратного.

Пусть теперь подмножество H замкнуто относительно операции и взятия обратного. Так как H замкнуто относительно операции, $(H, *)$ – группоид. Поскольку ассоциативность выполнена в G, то она выполнена и в H. Подмножество не пусто. Возьмем элемент $h \in H$. Так как H замкнуто относительно взятия обратного, $h^{-1} \in H$. Пользуясь замкнутостью H относительно операции, получаем $h*h^{-1} = e \in H$. Таким образом, в H выполнена аксиома А2. Поскольку H замкнуто относительно взятия обратного, в H выполнена и аксиома А3. □

Примеры групп.

1а) Числовые аддитивные группы:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +).$$

Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $-x$. Выполнение аксиом следуют из свойств сложения чисел. Все данные группы бесконечны и коммутативны.

1б) Числовые мультипликативные группы:

$$\mathbb{Q}^{\times} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{R}^{\times} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{C}^{\times} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Нейтральный элемент 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$. Выполнение аксиом следуют из свойств умножения чисел. Данные группы бесконечны и коммутативны.

Обобщение примера 1б) Пусть R – кольцо с единицей. Обозначим множество обратимых элементов через $R^{\times}$. Рассмотрим группу обратимых элементов $(R^{\times}, \cdot)$. Нейтральный элемент – единица кольца. Обратные элементы существуют так как $R^{\times}$ состоит из обратимых элементов. Если R – коммутативное кольцо, то $R^{\times}$ – коммутативная группа.

Задача 1. Приведите пример некоммутативного кольца R такого, что $R^{\times}$ – коммутативная группа порядка больше 1.

2) Группы перестановок.

а) Множество S_n всех перестановок n элементов с операцией композиции $\circ$ является группой. Докажем это. Нейтральный элемент этой группы – это тождественная перестановка, обратный элемент – обратная перестановка. Ассоциативность следует из следующей важной леммы.

Лемма 1. *Пусть есть четыре множества: X, Y, Z и W. И пусть фиксированы отображения между этими множествами $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ и $\zeta\colon Z \to W$. Тогда $(\zeta \circ \psi) \circ \varphi = \zeta \circ (\psi \circ \varphi)$.*

Доказательство. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда

$$(\zeta \circ \psi) \circ \varphi(x) = (\zeta \circ \psi)(\varphi(x)) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

С другой стороны

$$\zeta \circ (\psi \circ \varphi)(x) = \zeta(\psi \circ \varphi)(x) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

□

Применяя данную лемму к случаю $X = Y = Z = W = \{1, 2, \ldots, n\}$ получаем ассоциативность S_n. Порядок группы S_n равен $n!$. При $n > 3$ группа S_n не коммутативна.

б) Множество A_n четных перестановок из S_n с операцией композиции образует *группу четных перестановок*. Докажем, что A_n – подгруппа S_n. Это следует из того, что произведение четных перестановок – четная перестановка и обратная к четной перестановке четная. Группа A_n не коммутативна при $n \geq 4$.

в) Группа Клейна V_4. Рассмотрим множество перестановок (в виде произведения независимых циклов) $\{\mathrm{id},\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$. Несложно проверить, что это множество замкнуто относительно композиции и что каждая перестановка из этого множества обратна самой себе. Получаем, что данные перестановки образуют подгруппу в S_4, которая обозначается V_4. Эта группа коммутативна.

г) (Обобщение примера 6а) Пусть X – некоторое множество (возможно бесконечное). Рассмотрим множество $\mathrm{S}(X)$ биекций $X \to X$ с операцией композиции. Если $|X| < \infty$, то получаем группу перестановок. В общем случае получаем *группу симметий множества X*. Нейтральный элемент – тождественное преобразование. Обратный – обратное преобразование. Ассоциативность следует из леммы 1.

3) Матричные группы. Пусть $\mathbb{K}$ – поле.

а) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – множество невырожденных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно умножения матриц. Умножение матриц ассоциативно, единичная матрица – нейтральный элемент и все невырожденные матрицы обратимы (обратная также невырождена). Следовательно, $(\mathrm{GL}(\mathbb{K}), \cdot)$ – группа.

б) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ – множество $n \times n$ матриц с определителем 1 с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество в $\mathrm{GL}(\mathbb{K}$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Следовательно, это подгруппа.

в) $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ – множество ортогональных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество в $\mathrm{GL}(\mathbb{K}$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Следовательно, это подгруппа.

Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле $\mathbb{K}$ конечно.

4) Группы преобразований векторного пространства. (Подгруппы в группе $S(V)$, где V – векторное пространство.)

а) Группа обратимых линейных преобразований V.

б) Группа ортогональных линейных преобразований V.

в) Группа обратимых аффинных преобразований V.

г) Группа движений V.

Во всех этих группах нейтральный элемент – тождественное преобразование, а обратный элемент – обратное преобразование. Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле, над которым V – векторное пространство конечно и размерность V конечна.

д) Группа диэдра D_n. Рассмотрим правильный n-угольник. Группа диэдра D_n – это группа всех движений плоскости, сохраняющих этот n-угольник.

Упражнение 1. а) Докажите, что в группе D_n ровно $2n$ элементов. Среди них n поворотов и n осевых симметрий. Все оси симметрий проходят через центр n- угольника. Если n четно, то половина симметрий проходит через 2 вершины, а половина – через две серидины противоположных сторон. Если же n нечетно, то все симметрии проходят через одну вершину и середину противоположной стороны.

б) Найдите, как устроена операция в группе D_n, то есть чему равна композиция двух поворотов, двух симметрий и поворота с симметрией.

5) Группа вычетов (остатков) по модулю n: $(\mathbb{Z}_n, +)$. Сложение происходит по модулю n. Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $n - x$. Выполнение аксиом следуют из свойств остатков. Данная группа коммутативна и имеет порядок n.

6) Группа комплексных корней из единицы n-ой степени. Пусть μ_n – множество всех комплексных корней степени n из 1. Тогда $(\mu_n, \cdot)$ – абелева группа порядка n. Докажем это. Для того, чтобы доказать, что μ_n – группа мы воспользуемся, тем, что это подмножество в известной нам группе $\mathbb{C}^\times$. Нам надо лишь проверить, что μ_n замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Пусть $a, b \in \mu_n$, то есть $a^n = b^n = 1$. Тогда $(ab)^n = a^n b^n = 1$, значит, $ab \in \mu_n$. Мы доказали, что μ_n замкнуто относительно умножения. С другой стороны $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, следовательно, μ_n замкнуто относительно взятия обратного. То, что группа μ_n абелева следует из того, что она является подгруппой в абелевой группе $\mathbb{C}^\times$.

Единица этой группы – это 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$.

7) Группа кватернионов Q_8. Рассмотрим множество из 8 элементов:

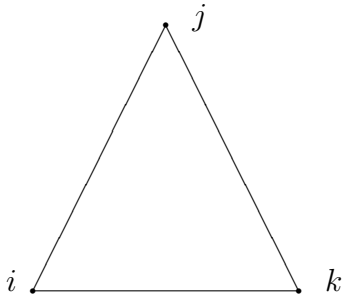
$$\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Умножение устроено следующим образом: знаки умножаются отдельно,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ ji = -k,\ ik = -j,\ ki = j,\ jk = i,\ kj = -i.$$

Для того, чтобы запомнить правило умножения элементов i, j и k удобно изобразить их в вершинах треугольника.



Теперь, если мы хотим умножить два элемента, то, если направление движение от первого ко второму по часовой стрелке, получаем третий элемент, а если против часовой стрелки, то минус третий.

Легко видеть, что 1 – нейтральный элемент, и каждый элемент обратим. В самом деле, элементы 1 и -1 являются обратными к самим себе. А для любого другого элемента x выполнено $x^{-1} = -x$. Для того, чтобы утверждать, что Q_8 – группа, необходимо проверить ассоциативность. Сделаем это на следующей лекции.

Лекция 2

Конечную группу можно задавать с помощью таблицы Кэли (таблицы умножения). Таблица умножения – это квадратная таблица, строки и столбцы которой соответствуют элементам группы. А на пересечении строки и столбца стоит произведение элемента, соответствующего строке, и элемента, соответствующего столбцу.

Пример 1. *Построим таблицу сложения для группы* $(\mathbb{Z}_3, +) = \{0, 1\}$

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Ясно, что таблица Кэли симметрична (относительно главной диагонали) тогда и только тогда, когда группа коммутативна.

Определение 6. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – две группы. Отображение $\varphi\colon G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

На самом деле, чтобы определить гомоморфизм нам не нужно, чтобы G и H были группами. Достаточно, чтобы на них были заданы некие операции (т.е., чтобы они были группоидами).

Докажем следующие элементарные свойства гомоморфизма.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi\colon (G, *) \to (H, \circ)$ *– гомоморфизм. Обозначим через* e_G *и* e_H *единицы группы* G *и* H *соответственно. Тогда*

1) $\varphi(e_G) = e_H$,

2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. *(В левой части обратный берется в группе* G*, а в правой – в* H*.)*

Доказательство. 1) Поскольку e_G – единица группы G. Тогда $e_G * e_G = e_G$, а значит,

$$\varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) = \varphi(e_G * e_G) = \varphi(e_G).$$

В группе H есть обратный к $\varphi(e_G)$ элемент. Умножим на него обе части. Получим

$$\varphi(e_G) = e_H.$$

2) $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(g * g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1})$. Следовательно, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. □

.

Задача 2. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – моноиды с единицами e_G и e_H соответственно. И пусть $\psi\colon G \to H$ – отображение такое, что $\psi(g_1 * g_2) = \psi(g_1) \circ \psi(g_2)$. Может ли так быть, что $\psi(e_G) \neq \psi(e_H)$?

Определение 7. Биективный гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ называется *изоморфизмом*, а группы G и H при наличии изоморфизма между ними называются *изоморфными*.

Изоморфные группы имеют одинаковую алгебраическую структуру. Более строго любой алгебраический факт (то есть формулирующийся только в терминах операции) верный в одной из них, верен и в другой. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять изоморфные группы и будем изучать группы с точностью до изоморфизма.

Теорема 1. *Отношение изоморфности – это отношение эквивалентности.*

Доказательство. Нужно проверить, что отношение изоморфности удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности. В самом деле. Тождественное преобразование задает изоморфизм любой группы с собой. Рефлексивность доказана. Если $\varphi\colon G \to H$ – изоморфизм, то в частности это биекция. Тогда существует обратное отображение φ^{-1}. Оно также является гомоморфизмом. В самом деле, пусть $a, b \in H$, в силу сюръективности φ, имеем $a = \varphi(u)$, $b = \varphi(v)$ для некоторых $u, v \in G$. Тогда $\varphi^{-1}(ab) = \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(uv)) = uv = \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b)$. Таким образом, φ^{-1} – изоморфизм. Симметричность доказана. Докажем, что композиция двух изоморфизмов – изоморфизм. Пусть $\varphi\colon G \to H$ и $\psi\colon H \to F$ – два гомоморфизма. Тогда

$$\psi \circ \varphi(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1 g_2)) = \psi(\varphi(g_1)\varphi(g_2)) = \psi(\varphi(g_1))\psi(\varphi(g_2)) = \psi \circ \varphi(g_1)\psi \circ \varphi(g_2).$$

То есть $\psi \circ \varphi$ – гомоморфизм. С другой стороны, $\psi \circ \varphi$ – биекция. Значит, $\psi \circ \varphi$ – изоморфизм. Транзитивность доказана. □

Из этого предложения следует, что все группы распадаются на непересекающиеся классы изоморфности.

Пример 2. *Рассмотрим две группы:* $(\mathbb{R}, +)$ *и* $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. *Вторая группа состоит из всех положительных вещественных чисел с операцией умножения. Рассмотрим отображение* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi(x) = 2^x$. *Легко видеть, что* φ *– изоморфизм.*

Пример 3. *Группа* $\mathbb{Z}_n$ *изоморфна группе* μ_n. *Один из возможных автоморфизмов переводит* $k \in \mathbb{Z}_n$ *в* $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$. *То, что* φ *– гомоморфизм обеспечивается тем, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются.*

Пример 4. *Группа* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *изоморфна группе невырожденных линейных преобразований векторного пространства* $\mathbb{C}^n$ *с операцией композиции. Чтобы получить изоморфизм между этими группами нужно выбрать некоторый базис в* $\mathbb{C}^n$ *и отобразить линейное преобразование в его матрицу в этом базисе.*

На самом деле изоморфизм (биективное соответствие, переводящее умножение одной группы в умножение другой) можно задать в случае, когда про одну из структур не известно, группа это или нет. Тогда вторая структура будет автоматически группой.

Теорема 2. *Пусть* G *– группа, а* H *– группоид. И пусть* $\varphi\colon G \to H$ *– биекция и гомоморфизм (то есть* $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$. *(Можно сказать, что* φ *– изоморфизм группоидов.) Тогда* H *– также группа и* φ *– изоморфизм групп.*

Доказательство. Докажем, что H – группа. Проверим ассоциативность. Пусть $h_1, h_2, h_3 \in H$. Обозначим $g_i = \varphi^{-1}(h_i)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$h_1(h_2h_3) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)\varphi(g_3)) = \varphi(g_1)\varphi(g_2g_3) =$$
$$= \varphi(g_1(g_2g_3)) = \varphi((g_1g_2)g_3) = \varphi(g_1g_2)\varphi(g_3) = (\varphi(g_1)\varphi(g_2))\varphi(g_3) = (h_1h_2)h_3.$$

Проверим, что $l = \varphi(e)$ – нейтральный элемент. Действительно, пусть $h = \varphi(g)$. Тогда $hl = \varphi(g)\varphi(e) = \varphi(ge) = \varphi(g) = h$ и $lh = \varphi(e)\varphi(g) = \varphi(eg) = \varphi(g) = h$.

Теперь проверим наличие обратного к элементу $h = \varphi(g)$. Докажем, что это $f = \varphi(g^{-1})$. Действительно, $hf = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(e) = l$ и $fh = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(e) = l$.

Итак, мы проверили, что H – группа. Таким образом φ – биективный гомоморфизм групп, то есть изоморфизм. □

Теперь мы готовы доказать, что Q_8 – группа.

Предложение 2. *Q_8 – группа*

Доказательство. Рассмотрим следующее множество из 8 комплексных матриц, которое мы обозначим $\overline{Q}_8$.

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь i – это мнимая единица (комплексное число).

Рассмотрим биекцию φ между Q_8 и $\overline{Q}_8$.

$$\pm 1 \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ i \mapsto \pm \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \ j \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ k \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что φ переводит умножение в Q_8 в матричное умножение. Следовательно, $(\overline{Q}_8, \cdot)$ – это замкнутое относительно умножения и взятия обратной матрицы подмножество в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Значит, $\overline{Q}_8$ – подгруппа. Тогда, по теореме 2, Q_8 – группа, изоморфная $\overline{Q}_8$. □

Особый интерес представляют гомоморфизмы и изоморфизмы из группы в себя.

Определение 8. Гомоморфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *эндоморфизмом*. Изомомрфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *автоморфизмом*.

Легко видеть, что композиция двух эндоморфизмов – это эндоморфизм, а композиция двух автоморфизмов – автоморфизм. Множество эндоморфизмов группы G с операцией композиции образует моноид $\mathrm{End}(G)$ с нейтральным элементом id. Множество автоморфизмов группы G с операцией композиции образует группу $\mathrm{Aut}(G)$.

Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g\colon G \to G$, определенное по правилу $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

Лемма 3. *Отображение φ_g является автоморфизмом группы G.*

Доказательство. Проверим, что φ_g – гомоморфизм:

$$\varphi_g(hf) = ghfg^{-1} = ghg^{-1}gfg^{-1} = \varphi_g(h)\varphi_g(f).$$

То, что φ_g – биекция следует из того, что существует обратное отображение. А именно, обратное к φ_g отображение – это $\varphi_{g^{-1}}$. □

Автоморфизм называются *внутренним*, если он имеет вид φ_g для некоторого $g \in G$.

Предложение 3. *Множество внутренних автоморфизмов с операцией композиции образует подгруппу* $\mathrm{Inn}(G)$ *в* $\mathrm{Aut}(G)$.

Доказательство. Докажем равенство $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Для этого применим этот гомоморфизм к элементу $s \in G$:

$$\varphi_g \circ \varphi_h(s) = \varphi_g(\varphi_h(s)) = \varphi_g(hsh^{-1}) = ghsh^{-1}g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(s).$$

Из доказанного равенства следует замкнутость $\mathrm{Inn}(G)$ относительно композиции. Кроме того $\mathrm{id} = \varphi_e \in \mathrm{Inn}(G)$. Осталось проверить, что $\mathrm{Inn}(G)$ замкнуто относительно взятия обратного. Для этого заметим, что $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_e = \mathrm{id}$. □

Лекция 3

Предложение 4. Простые следствия из аксиом.

1) (Обобщенная ассоциативность) Пусть $(G, *)$ – полугруппа. И пусть $g_1, \ldots, g_k \in G$. Тогда как бы ни были расставлены скобки в выражении $g_1 * g_2 * \ldots * g_k$ результат будет одинаковым.

2) В моноиде есть единственная единица.

3) В группе для каждого элемента есть единственный обратный.

4) Пусть $(G, *)$ – группа. Пусть $a, b \in G$. Тогда если $a*b = e$, то $b = a^{-1}$. Аналогично если $b * a = e$, то $b = a^{-1}$.

5) Пусть $(G, *)$ – группа, $a, b \in G$. Тогда $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

6) Пусть $(G, *)$ – группа, $g \in G$. Тогда $(g^{-1})^{-1} = g$.

Доказательство. 1) Докажем это утверждение индукцией по k.

База индукции $k = 3$. В этом случае обобщенная ассоциативность совпадает с ассоциативностью, то есть с аксиомой A1.

Шаг индукции. Предположим, что для $k < n$ данное утверждение уже доказано. Докажем его для $k = n$. Среди всех расстановок скобок есть стандартная (при ней действия выполняются слева-направо):

$$(\ldots(g_1 * g_2) * g_3) * \ldots * g_{n-1}) * g_n = g.$$

Достаточно доказать, что результат, который получается при произвольной расстановке скобок, совпадает с g. Фиксируем некоторую расстановку скобок. Для этой расстановки скобок есть последнее действие, которое дает операцию от двух скобок. Длиной скобки назовем количество g_i, входящих в нее. Обозначим длину правой скобки через s.

Случай 1 $s = 1$. Наша расстановка скобок имеет вид $(\ldots) * g_n$. По предположению индукции в левой скобке можно расставить скобки произвольным образом. В том числе стандартным образом. Но тогда в целом мы получим стандартную расстановку скобок. Значит, результат при нашей расстановке скобок совпадает с результатом при стандартной расстановке скобок.

Случай 2 $s > 2$. Последнее действие при нашей фиксированной расстановке скобок имеет вид $(a) * (b)$. Длина скобки b меньше n. По предположению индукции можно считать, что в скобке b расстановка скобок стандартная. Таким образом, стандартная расстановка скобок в скобке b дает $b = d * g_n$. То есть $g = a * (d * g_n) = (a * d) * g_n$. По случаю 1 мы получаем, что в g можно расставить скобки стандартным образом.

2) Предположим, что в моноиде $(G, *)$ есть две единицы: e и s. Рассмотрим $e * s$. Поскольку e – единица, получаем $e * s = s$. С другой стороны так как s – единица, то $e * s = e$. Таким образом, $e = s$.

3) Пусть $(G, *)$ – группа. Предположим, что $g \in G$ – элемент, у которого есть хотя бы два обратных: f и h. Тогда $f = f * (g * h) = (f * g) * h = h$.

4) Пусть $a*b = e$. Рассмотрим операцию элемента a^{-1} и левой части и приравняем к операции элемента a^{-1} и правой части. (Домножим на a^{-1} слева.) Получим $a^{-1}*a*b = a^{-1} * e$. То есть $b = a^{-1}$.

Если $b * a = e$, то аналогично домножая слева на a^{-1}, получаем $b = a^{-1}$.

5) Обозначим $b^{-1}*a^{-1}=c$. Рассмотрим $(a*b)*c=(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*b^{-1})*a^{-1}=a*e*a^{-1}=e$. Значит, $c=(a*b)^{-1}$.

6) $g^{-1}*g=e$, значит $g=(g^{-1})^{-1}$. □

Теорема 3. *1)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_2$,

2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)\cong\mathbb{Z}_n^\times$.

Замечание 1. Напомним, что $\mathbb{Z}_n^\times$ – это группа обратимых по умножению элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$. Группа $\mathbb{Z}_n^\times$ состоит из вычетов взаимно простых с n. В частности, $|\mathbb{Z}_n^\times|=\varphi(n)$, где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера.

Доказательство теоремы 3. 1) Пусть ψ – автоморфизм $\mathbb{Z}$. Тогда $\psi(0)=0$. Пусть $\psi(1)=k$. Тогда

$$\psi(2)=\psi(1+1)=\psi(1)+\psi(1)=2k,$$

$$\psi(3)=\psi(1+1+1)=\psi(1)+\psi(1)+\psi(1)=3k,$$

и т.д. Аналогично $\psi(-1)=-k$, $\psi(-2)=\psi((-1)+(-1))=-2k$. Получаем

$$\psi(m)=mk.$$

Однако при $k\neq\pm1$ гомоморфизм ψ не будет сюръективен. При $k=1$ и $k=-1$ получаем тождественное отображение и отображение $\{x\mapsto -x\}$. Легко видеть, что эти два автоморфизма с операцией композиции образуют группу, изоморфную $\mathbb{Z}_2$.

2) Аналогично случаю 1 любой гомоморфизм $\psi\colon\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ имеет вид

$$\psi_k\colon m\mapsto km.$$

Если k не обратим, то в образе ψ_k не лежит 1, а значит, ψ_k не сюръективно. Если же k обратим, то для любого вычета l имеем $\psi_k(k^{-1}l)=l$. Следовательно, ψ_k сюръективно, а значит, так как множество $\mathbb{Z}_n$ конечно, гомоморфизм ψ_k – биекция.

Итак, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ состоит из ψ_k для $k\in\mathbb{Z}_n^\times$. Докажем, что отображение

$$\zeta\colon\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)\to\mathbb{Z}_n^\times,\qquad\zeta(\psi_k)=k$$

является изоморфизмом. Это очевидно биекция, осталось проверить, что ζ – гомоморфизм. Это следует из равенства $\psi_k\circ\psi_m=\psi_{km}$, которое легко проверить. □

Определение 9. Пусть $\varphi\colon G\to H$ – гомоморфизм групп. Ядром гомоморфизма φ называется множество

$$\mathrm{Ker}\,\varphi=\{g\in G\mid\varphi(g)=e\}\subseteq G.$$

Образом гомоморфизма φ называется множество

$$\mathrm{Im}\,\varphi=\{\varphi(g)\mid g\in G\}\subseteq H.$$

Поскольку $\varphi(e)=e$, нейтральный элемент всегда лежит в ядре.

Лемма 4. *Пусть $\varphi\colon G\to H$ – гомоморфизм. Тогда*

а) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ *– подгруппа в* G,

б) $\mathrm{Im}\,\varphi$ *– подгруппа в* H.

Доказательство. а) Пусть $g_1,g_2\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. Тогда $\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)=ee=e$. Значит, $g_1g_2\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. То есть ядро замкнуто относительно операции. Кроме того $\varphi(g_1^{-1})=\varphi(g_1^{-1})\varphi(g_1)=\varphi(g_1^{-1}g_1)=\varphi(e)=e$. Значит, $g_1^{-1}\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. Таким образом, ядро замкнуто относительно взятия обратного. Осталось заметить, что $e\in\mathrm{Ker}\,\varphi$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ – подгруппа в G.

б) Пусть $h_1, h_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда найдутся $g_1, g_2 \in G$ такие, что $h_1 = \varphi(g_1)$, $h_2 = \varphi(g_2)$. Тогда $h_1 h_2 = \varphi(g_1 g_2) \in \operatorname{Im}\varphi$ и $h_1^{-1} = \varphi(g_1^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi$. Кроме того $e = \varphi(e) \in \operatorname{Im}\varphi$. То есть образ замкнут относительно операции, взятия обратного и содержит единицу. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H. □

Теорема 4. *(Критерий инъективности гомоморфизма) Гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{e\}$. Тогда существует $g \neq e$, $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть $\varphi(g) = e = \varphi(e)$. Следовательно, гомоморфизм φ не инъективен.

Допустим, гомоморфизм φ не инъективен. Тогда $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ для некоторых $g_1 \neq g_2 \in G$. Значит, $\varphi(g_1 g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e$. То есть $g_1 g_2^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, но $g_1 g_2^{-1} \neq e$. Значит, $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{e\}$. □

Определение 10. Пусть g – элемент группы G, а n – целое число. Определим n-ю степень элемента g следующим образом. Если n положительное, то $g^n = g \cdot \ldots \cdot g$ – произведение n элементов g. Если n отрицательное, то $g^n = (g^{-1})^n$. Нулевая степень любого элемента равна нейтральному элементу e.

Упражнение 2. Выполнены следующие свойства степеней элемента группы:
1) $g^m g^n = g^{m+n}$,
2) $(g^m)^n = g^{mn}$
Указание. Рассмотреть все случаи знаков m и n.

Определение 11. Пусть g – элемент группы G. Порядок g – это минимальное натуральное число n такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существует, то порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента g обозначается $\operatorname{ord}(g)$.

Определение 12. Группа G называется *циклической*, если найдется элемент $g \in G$ такой, что каждый элемент G имеет вид g^k для некоторого целого числа k.

Элемент g называется *порождающим элементом группы* G, при этом группа G обозначается $\langle g \rangle$.

Замечание 2. В предыдущем определении не требуется, чтобы все степени g были различны.

Пример 5. *а) Группа $\mathbb{Z}$ является циклической. В самом деле, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.*
б) Аналогично $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$.

Лекция 4

Лемма 5. *Циклическая группа $\langle g \rangle$ изоморфна*

- *$\mathbb{Z}_n$ при условии $\operatorname{ord} g = n$;*
- *$\mathbb{Z}$ при условии $\operatorname{ord} g = \infty$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord} g = n$. Рассмотрим множество элементов

$$S = \{g^0 = e, g, g^2, \ldots g^{n-1}\}.$$

Докажем, что все элементы группы $\langle g \rangle$ лежат в S и что все элементы S различны. В самом деле, пусть g^k – некоторый элемент $\langle g \rangle$. Разделим k на n с остатком: $k = nm + r$, где $0 \leq k < n$. Тогда $g^k = (g^n)^m g^r = g^r \in S$.

С другой стороны. Пусть $0 \leq a < b < n$ и $g^a = g^b$. Умножая последнее равенство на g^{-a}, получаем $e = g^{b-a}$. Поскольку $0 < b - a < n$, это противоречит тому, что $\operatorname{ord}(g) = n$.

Рассмотрим отображение $\psi\colon \mathbb{Z}_n \to \langle g\rangle$, $\psi(k) = g^k$. Элементы $\mathbb{Z}_n$ – это не числа, а классы чисел с одинаковым остатком. Поэтому нам надо доказать, что отображение ψ определено корректно. А именно, пусть $k' = mn + k$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $\psi(k') = g^{k'} = (g^n)^m g^k = g^k = \psi(k)$. Корректность доказана. Теперь проверим, что ψ – гомоморфизм. Действительно, $\psi(k+l) = g^{k+l} = g^k g^l = \psi(k)\psi(l)$. Заметим, что $\mathbb{Z}_n$ состоит из классов чисел $0, 1, \ldots, n-1$. При отображении ψ эти классы переходят в элементы множества S. Причем это отображение очевидно сюръективно и инъективно так как элементы S не совпадают. Итак, ψ – гомоморфизм и биекция, то есть изоморфизм.

Пусть теперь $\operatorname{ord} g = \infty$. Рассмотрим отображение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \langle g\rangle$, $\psi(k) = g^k$. Как и в прошлом случае получим, что ψ – гомоморфизм. (В этом случае проверять корректность не нужно, так как элементы $\mathbb{Z}$ – числа, а не классы чисел.) Сюръективность ψ следует из определения циклической группы. Докажем инъективность. Предположим, что $g^a = g^b$, где $a > b$. Домножим это равенство на g^{-b} и получим $g^{a-b} = e$, что противоречит тому, что $\operatorname{ord} g = \infty$. Итак, ψ – гомоморфизм и биекция, то есть изоморфизм. □

Если известно, что порядок g равен n, то группу $\langle g\rangle$ обозначают $\langle g\rangle_n$.

Замечание 3. Для каждого элемента g некоторой группы G можно рассмотреть циклическую подгруппу, порожденную этим элементом: $\langle g\rangle \subset G$.

Лемма 6. *Пусть g – элемент группы G такой, что* $\operatorname{ord} g = n$, *а m – целое число. Тогда*

$$\operatorname{ord} g^m = \frac{n}{НОД(m,n)} = \frac{НОК(m,n)}{m}.$$

Доказательство. Докажем это утверждение только для положительных m, так как $\operatorname{ord}(g^{-m}) = \operatorname{ord}((g^m)^{-1}) = \operatorname{ord}(g^m)$, а также $\operatorname{ord}(g^0) = 1$.

Рассмотрим группу $\langle g\rangle$. По предыдущей лемме она изоморфна $\mathbb{Z}_n$. Более того при построенном изоморфизме этих групп элемент g соответствует $1 \in \mathbb{Z}_n$, и элемент g^m соответствует $m \in \mathbb{Z}_n$. Таким образом, нам нужно доказать, что порядок $m \in \mathbb{Z}_n$ равен $\frac{n}{\text{НОД}(m,n)} = \frac{\text{НОК}(m,n)}{m}$. Порядок – это такая минимальная натуральная степень k, в которой элемент равен e. В аддитивных обозначениях получаем $\operatorname{ord}(m) = k$, если k – это минимальное натуральное число такое, что $mk = 0$ в $\mathbb{Z}_n$. Для целых чисел условие перепишется как mk делится на n. Получается, что mk – общее кратное m и n. Таким образом, $k \geq \frac{\text{НОК}(m,n)}{m}$.С другой стороны $k = \frac{\text{НОК}(m,n)}{m}$ подходит, так как $mk = \frac{\text{НОК}(m,n)}{m} m = \text{НОК}(m,n)$ делится на n. □

Теорема 5. *1) Подгруппа циклической группы циклическая;*
2) Все подгруппы $\mathbb{Z}$ имеют вид $\langle k\rangle = k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$;
3) Все подгруппы $\mathbb{Z}_n$ имеют вид $\langle d\rangle = d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$ для некоторого d – делителя n;
4) Пусть $m \in \mathbb{Z}_n$. Тогда $\langle m\rangle = \langle НОД(m,n)\rangle$.

Доказательство. 1) Следует из пунктов 2) и 3).

2) Пусть H – подгруппа в $\mathbb{Z}$. Если $H = \{0\}$, то $H = \langle 0\rangle$, что укладывается в утверждение задачи. Пусть $H \neq \{0\}$. Если $h \in H$ – отрицательное число, то положительное число $-h$ также лежит в H. Значит, в H есть натуральные числа. Выберем k – минимальное натуральное число из H. Пусть $h \in H$. Тогда $h = kq + r$, где $0 \leq r < k$. При этом $kq \in H$, $h \in H$, следовательно, $r \in H$. Если $r \neq 0$, получаем противоречие с выбором k. Значит, $r = 0$ и h делится на k. Отсюда $H = \langle k\rangle$.

3) Пусть H – подгруппа в $\mathbb{Z}_n$. Если $H = \{0\}$, то $H = \langle n \rangle$, что укладывается в утверждение задачи. Пусть $H \neq \{0\}$. Рассмотрим минимальное натуральное число d такое, что его класс лежит в H. Ясно, что $d < n$. Пусть $h \in H$. Тогда $h = dq + r$, где $0 \leq r < d$. При этом $dq \in H$, $h \in H$, следовательно, $r \in H$. Если $r \neq 0$, получаем противоречие с выбором d. Значит, $r = 0$ и h делится на d. Отсюда $H = \langle d \rangle$. Докажем, что d – делитель n. Если это не так, то $n = kd + s$, $0 < s < d$. Но тогда в $\mathbb{Z}_n$ выполнено $s = kd \in H$, противоречие с выбором d. Итак, d – делитель n. Осталось сказать, что порядок d в группе $\mathbb{Z}_n$ равен $\frac{n}{d}$. Значит, $H = \langle d \rangle \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$.

4) $\langle m \rangle$ – циклическая группа. По лемме 6, $\mathrm{ord}(m) = \frac{n}{\text{НОД}(m,n)}$. Значит $|\langle m \rangle| = \frac{n}{\text{НОД}(m,n)}$. Следовательно, по пункту 3), $\langle m \rangle = \langle \text{НОД}(m, n) \rangle$. □

Определение 13. Пусть H – подгруппа группы G. Рассмотрим элемент $g \in G$. *Левым смежным классом элемента g по подгруппе H* называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Правым смежным классом элемента g по подгруппе H называется множество

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Лемма 7. *1) $g \in fH$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}g \in H$,*

1') $g \in Hf$ тогда и только тогда, когда $gf^{-1} \in H$,

2) Левые (правые) смежные классы – это классы эквивалентности. (Более точно, отношение $g \sim f$, если $g \in fH$ является отношением эквивалентности.)

3) Следующие мощности одинаковы $|gH| = |Hg| = |H|$.

Доказательство. 1) $g \in fH \iff g = fh \iff f^{-1}g = h$.

1') $g \in Hf \iff g = hf \iff gf^{-1} = h$.

2) Докажем только для левых смежных классов. Для правых аналогично.

Рефлексивность: $g \in gH$ так как $e \in H$,

Симметричность:

$$g \in fH \iff f^{-1}g \in H \iff (f^{-1}g)^{-1} = g^{-1}f \in H \iff f \in gH.$$

Транзитивность:

$$g \in fH, f \in sH \Longrightarrow f^{-1}g \in H, s^{-1}f \in H \Longrightarrow s^{-1}ff^{-1}g = s^{-1}g \in H.$$

3) Следует из того, что $gh_1 = gh_2$ тогда и только тогда, когда $h_1 = h_2$. □

Замечание 4. Из пункта 2 следует, что левые (правые) смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают.

Определение 14. Индекс подгруппы H группы G – это мощность множества левых смежных классов. Обозначается индекс $[G : H]$

Задача 3. Докажите, что $gH \leftrightarrow Hg^{-1}$ – биекция между левыми и правыми смежными классами, и следовательно мощность правых смежных классов также равна индексу подгруппы. (То, что количество левых и правых смежных классов одинаково для конечной группы будет следовать из теоремы Лагранжа, но это верно и для бесконечных групп.)

Лекция 5

Теорема 6. *(Лагранж) Пусть G – конечная группа и H – подгруппа G. Тогда*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Поскольку каждый элемент группы G лежит в некотором левом смежном классе и левые смежные классы либо совпадают, либо не пересекаются, вся группа G разбивается на непересекающиеся левые смежные классы. Так как мощность каждого смежного класса равна $|H|$, мощность всей группы равна $|H|$ умножить на количество смежных классов. □

Следствие 1. *(Следствия из теоремы Лагранжа)*

1) Порядок конечной группы делится на порядок ее подгруппы.

2) Порядок конечной группы делится на порядок ее элемента.

3) Для любого элемента g конечной группы G выполнено $g^{|G|} = e$.

4) Группа простого порядка циклическая.

5) (Теорема Эйлера) Пусть m и n – взаимно простые натуральные числа. Тогда $n^{\varphi(m)}$ имеет остаток 1 при делении на m.

Доказательство. 1) Очевидно следует из теоремы Лагранжа.

2) Пусть g – элемент конечной группы G. Рассмотрим циклическую подгруппу $H = \langle g \rangle$. Поскольку $\mathrm{ord}(g) = |H|$, порядок G делится на $\mathrm{ord}(g)$.

3) Пусть $|G| = \mathrm{ord}(g) \cdot k$. Тогда $g^{|G|} = (g^{\mathrm{ord}(g)})^k = e^k = e$.

4) Пусть $|G| = p$ – простое число. Рассмотрим $g \neq e \in G$. Поскольку порядок g делит p и не равен 1, получаем $\mathrm{ord}(g) = p$. А значит, $G = \langle g \rangle$.

5) Применим пункт 3 к группе $\mathbb{Z}_m^\times$ и ее элементу n. Получаем

$$n^{|\mathbb{Z}_m^\times|} = n^{\varphi(m)} = 1.$$

□

Задача 4. Приведите пример конечной группы и делителя ее порядка такого, что в группе нет подгруппы такого порядка.

Определение 15. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ выполнено $gH = Hg$. То, что H – нормальная подгруппа G обозначается так: $G \triangleright H$.

Обозначим через gHg^{-1} множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Лемма 8. *Следующие условия равносильны:*

1) $G \triangleright H$,

2) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} = H$,

3) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} \subseteq H$,

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$ В множестве $gH = Hg$ каждый элемент имеет вид $gh_1 = h_2g$. При этом и h_1 и h_2 пробегают всю группу H. Домножим каждый элемент справа на g^{-1}, получим $gh_1g^{-1} = h_2$. То есть $gHg^{-1} = H$.

$2 \Longrightarrow 3$ Очевидно.

$3 \Longrightarrow 1$. Для каждых $g \in G$ и $h \in H$ выполнено $ghg^{-1} = \tilde{h} \in H$. Тогда $gh = ghg^{-1}g = \tilde{h}g$. Отсюда $gH \subseteq Hg$. Аналогично $hg = gg^{-1}hg = g\widehat{h}$ для $\widehat{h} = g^{-1}hg \in H$. Значит, $gH \supseteq Hg$. В итоге $gH = Hg$. □

Пример 6. *Любая подгруппа в абелевой группе нормальна, так как $ghg^{-1} = h$.*

Пример 7. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ – *нормальная подгруппа в* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Действительно, пусть* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. *Тогда* $\det(ABA^{-1}) = \det A \det B (\det A)^{-1} = 1$. *То есть* $ABA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Пример 8. *Подгруппа* $\langle (1,2) \rangle = \{\mathrm{id}, (1,2)\} \subseteq S_3$ *не является нормальной. В самом деле,*

$$(1,2,3)(1,2)(1,2,3)^{-1} = (1,2,3)(1,2)(1,3,2) = (2,3) \notin \langle (1,2) \rangle.$$

Упражнение 3. Найдите явно разбиение группы S_3 на левые и правые смежные классы по подгруппе $\langle (1,2) \rangle$.

Определение 16. Пусть H – нормальная подгруппа в группе G. Факторгруппа G/H – это множество (левых, они же правые) смежных классов по подгруппе H с операцией

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2) H.$$

Определение умножения в факторгруппе требует проверки корректности, то есть проверки того, что результат умножения не зависит от выбора представителей в смежных классах. Потенциальная проблема содержится в том, что $g_1 H = g_1' H$, $g_2 H = g_2' H$, но при этом смежный класс $g_1 g_2 H$ может не совпадать с $g_1' g_2' H$. Тогда умножение называется некорректным.

Предложение 5. *Пусть* G *– группа,* H *– подгруппа. Тогда умножение на множестве левых смежных классов корректно тогда и только тогда, когда* H *нормальна.*

Доказательство. Пусть H нормальна и $g_1 H = g_1' H$, $g_2 H = g_2' H$. Получаем, что $g_1'^{-1} g_1 \in H$ и $g_2'^{-1} g_2 \in H$. Обозначим $g_1'^{-1} g_1$ через h. Имеем

$$(g_1' g_2')^{-1} (g_1 g_2) = g_2'^{-1} g_1'^{-1} g_1 g_2 = g_2'^{-1} h g_2 \in H$$

Это означает, что $g_1 g_2 H$ совпадает с $g_1' g_2' H$. Значит, умножение корректно.

Пусть теперь H не нормальна. Тогда найдутся $g \in G$ и $h \in H$ такие, что $ghg^{-1} \notin H$. Тогда $gH = (gh)H$. Рассмотрим следующие смежные классы: $gH = (gh)H$ и $g^{-1}H$. Имеем $gH \cdot g^{-1}H = H$, но $(gh)H \cdot g^{-1}H = (ghg^{-1})H \neq H$. Значит, умножение не корректно. □

Легко видеть, что G/H действительно группа. Ассоциативность произведения следует из ассоциативности произведения в G, единичный элемент – это $eH = H$, обратный к gH элемент – это $g^{-1}H$. Из теоремы Лагранжа следует, что если G – конечная группа, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

Пример 9. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *Подгруппа* $n\mathbb{Z}$ *нормальна, так как группа* $\mathbb{Z}$ *абелева. Смежные классы имеют вид* $k+n\mathbb{Z}$. *При этом* $k+n\mathbb{Z} = l+\mathbb{Z}$ *тогда и только тогда, когда* k *и* l *имеют одинаковые остатки при делении на* n. *Сопоставим смежному классу* $k + n\mathbb{Z}$ *остаток при делении* k *на* n. *Докажем, что это сопоставление – это изоморфизм* ψ *между* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *и* $\mathbb{Z}_n$. *Действительно, сложению смежных классов соответствует сложение остатков. Кроме того* ψ *сюръективно, так как любой остаток – это остаток некоторого числа* k, *а значит, он равен* $\psi(k + n\mathbb{Z})$. *Для проверки инъективности* ψ, *воспользуемся критерием инъективности. Ядро* ψ *– это то, что переходит в остаток ноль, то есть смежный класс* $n\mathbb{Z}$, *который является нейтральным элементом фактор-группы.*

Пусть $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм групп.

Лемма 9. *1) Ядро* $\operatorname{Ker}\varphi$ *– нормальная подгруппа в группе* G.
2) Образ $\operatorname{Im}\varphi$ *– подгруппа в группе* $\widetilde{G}$.

Доказательство. Все, кроме нормальности ядра уже было доказано в лемме 4. Докажем, что подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G$ нормальна. Пусть $g \in G$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e.$$

Значит, $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа. □

Определение 17. Рассмотрим следующее отображение $\pi_H \colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Из определения операции в факторгруппе следует, что π_H – гомоморфизм. Легко видеть, что он сюръективен. Гомоморфизм π_H называется *каноническим гомоморфизмом.*

Для канонического гомоморфизма ядро – это нормальная подгруппа H, а образ – факторгруппа G/H. Следующая теорема показывает, что ситуация аналогична для любого гомоморфизма.

Теорема 7. *(Теорема о гомоморфизме) Пусть* $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ *– гомоморфизм групп. Тогда* $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Psi \colon G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, \qquad \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g).$$

Сперва нам надо проверить корректность отображения Ψ, то есть то, что оно не зависит от выбора представителя g из смежного класса. Для этого заметим, что если $g\operatorname{Ker}\varphi = g'\operatorname{Ker}\varphi$, то $g'^{-1}g = h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $g = g'h$. Получаем $\varphi(g) = \varphi(g'h) = \varphi(g')\varphi(h) = \varphi(g')e = \varphi(g')$. Таким образом, отображение Ψопределено корректно.

Докажем, что Ψ – изоморфизм. То, что Ψ –гомоморфизм следует из равенства:

$$\Psi((g\operatorname{Ker}\varphi)(f\operatorname{Ker}\varphi)) = \Psi(gf\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi)\Psi(f\operatorname{Ker}\varphi).$$

Инъективность Ψ проверим по критерию инъективности. Если $g\operatorname{Ker}\varphi \in \operatorname{Ker}\Psi$, то $\Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g) = e$. Значит, $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть $g\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ – единица факторгруппы. Сюръективность Ψ очевидна, так как для любого элемента $\varphi(g)$ в $\operatorname{Im}\varphi$ в него отображается смежный класс $g\operatorname{Ker}\varphi$. □

Следствие 2. *Если* $|G| < \infty$ *и* $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ *– гомоморфизм, то*

$$|\operatorname{Ker}\varphi| \cdot |\operatorname{Im}\varphi| = |G|.$$

Пример 10. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *по теореме о гомоморфизме. Для того, чтобы применить теорему о гомоморфизме, нам нужно построить гомоморфизм* $\varphi \colon Z \to G'$ *для некторой группы* G' *такой, что* $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$. *Легко видеть, что подходит следующий гомоморфизм*

$$\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \qquad k \mapsto k \,(\mathrm{mod}\, n)$$

Действительно, φ *– гомоморфизм,* $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$ *и* φ *– сюръекция, то есть* $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}_n$. *По теореме о гомоморфизме* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Лекция 6

Определение 18. Центр группы G – это множество $Z(G)$ элементов, коммутирующих со всеми элементами группы. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$.

Лемма 10. *Центр – это нормальная подгруппа G.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in Z(G)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено

$$z_1 z_2 g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2.$$

Значит, $Z(G)$ – замкнутое относительно операции подмножество. Для доказательства замкнутости относительно взятия обратного заметим, что если $z \in Z(G)$, то для любого $g \in G$ выполнено $zg^{-1} = g^{-1}z$. Тогда

$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}.$$

Кроме того $Z(G) \neq \varnothing$, так как $e \in Z(G)$.

То, что подгруппа $Z(G)$ нормальна следует из равенства $gzg^{-1} = z \in Z(G)$. □

Предложение 6. *Факторгруппа группы G по центру изоморфна группе внутренних атоморфизмов* $\mathrm{Inn}(G)$.

Доказательство. По предложению 3(б) отображение $\Psi\colon G \to \mathrm{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ является гомоморфизмом. По определению внутренних автоморфизмов гомоморфизм Ψ сюръективен. Ядро Ψ состоит из тех элементов $g \in G$, для которых $\varphi_g = \mathrm{id}$, то есть $\forall h \in G$ выполнено $ghg^{-1} = h$. Это означает $g \in Z(G)$. Итак, $\operatorname{Ker}\varphi = Z(G)$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathrm{Inn}(G)$. По теореме о гомоморфизме $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$. □

Предложение 7. *Если группа G не коммутативна, то группа $G/Z(G)$ не является циклической.*

Доказательство. Предположим, что $G/Z(G) = \langle aZ(G)\rangle$, $a \in G$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $g \in a^k Z(G)$, то есть $g = a^k z$, где $z \in Z(G)$. Возьмем $g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 = a^k z_1$, $g_2 = a^m z_2$. Имеем

$$g_1 g_2 = a^k z_1 a^m z_2 = a^{k+m} z_1 z_2 = a^{k+m} z_2 z_1 = a^m z_2 a^k z_1 = g_2 g_1.$$

Таким образом, G коммутативна. (И следовательно, $G/Z(G) \cong \{e\}$.) □

Определение 19. Пусть G и H – две группы. *Прямым произведением* $G \times H$ называется множество пар (g, h), где $g \in G$, $h \in H$, с операцией $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$.

Замечание 5. Прямое произведение групп является группой. Действительно, ассоциативность умножения следует из ассоциативности умножения в каждой из групп G и H, нейтральным элементом является элемент (e_G, e_H), обратным к элементу (g, h) является элемент (g^{-1}, h^{-1}).

Определение 20. Пусть группа G содержит подмножество S. *Подгруппой, порожденной подмножеством S*, называется минимальная подгруппа, содержащая S. Обозначается эта подгруппа $\langle S\rangle$. Если $G = \langle S\rangle$, то S называется *множеством порождающих группы G*.

Лемма 11. *Пусть $G = \langle S\rangle$, тогда G совпадает с множеством конечных произведений элементов из S и обратных к ним, то есть*

$$\{s_1^{\pm 1} \dots s_n^{\pm 1} \mid s_i \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Легко видеть, что множество конечных произведений элементов из S и обратных к ним замкнуто относительно произведения и взятия обратного. Кроме того в нем лежит $ss^{-1} = e$. Значит, это подгруппа, содержащая S, и следовательно, совпадает с G. □

Упражнение 4. Докажите, что
а) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$,
б) $S_n = \langle (1,2), (2,3) \ldots, (n-1,n) \rangle = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$,
в) $A_n = \langle (1,2,3), (1,2,4), \ldots, (1,2,n) \rangle$.

Пример 11. *Построим сюръективный гомоморфизм $S_4 \to S_3$. Рассмотрим 4 переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и три многочлена от этих переменных:*

$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad f_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \qquad f_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Если применить к x_1, x_2, x_3, x_4 перестановку σ, то f_i переставятся между собой по перестановке $\tau(\sigma)$. Ясно, что $\tau(\sigma \circ \delta) = \tau(\sigma) \circ \tau(\delta)$, то есть τ – гомоморфизм $S_4 \to S_3$.

Заметим, что $\tau(2,3) = (1,2)$, значит, $(1,2) \in \operatorname{Im} \tau$. Аналогично можно проверить, что все транспозиции лежат в образе τ. Поскольку S_3 порождается транспозициями, гомоморфизм τ сюръективен. Легко видеть, что $V_4 \subset \operatorname{Ker} \varphi$. С другой стороны $|\operatorname{Ker} \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \varphi = V_4$.

По теореме о гомоморфизме получаем следующий изоморфизм:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Лемма 12. *Пусть G – группа, $H \lhd G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа. Тогда $\langle K \cup H \rangle = KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$.*

Доказательство. Докажем, что KH замкнуто относительно умножения. Действительно,

$$(k_1h_1)(k_2h_2) = k_1k_2k_2^{-1}h_1k_2h_2 = k_1k_2(k_2^{-1}h_1k_2)h_2 = k_1k_2\widehat{h}h_2 \in KH.$$

Теперь докажем, что KH замкнуто относительно взятия обратного:

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = k^{-1}kh^{-1}k^{-1} = k^{-1}(kh^{-1}k^{-1}) = k^{-1}\widetilde{h} \in KH.$$

Поскольку KH не пусто, это группа. Очевидно, что KH – наименьшая подгруппа, содержащая K и H. □

Теорема 8. *(Вторая теорема о гомоморфизме) Пусть G – группа, $H \lhd G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа.*
1) $H \cap K$ – нормальная подгруппа в K и H – нормальная подгруппа в KH,
2) $KH/H \cong K/(H \cap K)$.

Доказательство. 1) Пусть $a \in H \cap K$, $k \in K$. Тогда $a \in H \Rightarrow kak^{-1} \in H$. С другой стороны $a \in K \Rightarrow kak^{-1} \in K$. То есть $kak^{-1} \in H \cap K$. То есть $(H \cap K) \lhd K$.

Пусть $h \in H, g \in KH$, тогда, так как $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$. Значит, $H \lhd KH$.

2) Рассмотрим $\Psi\colon K \to (KH)/H$, $k \mapsto kH$. Докажем, что Ψ – сюръекция. Действительно, пусть $khH \in (KH)/H$. Тогда $khH = kH = \Psi(k)$. Легко видеть, что Ψ – гомоморфизм. Найдем ядро Ψ. Пусть $k \in \operatorname{Ker} \Psi$, тогда $kH = H$. Это значит, что $k \in H$. С другой стороны $k \in K$. То есть $k \in (H \cap K)$. Итак, $\operatorname{Ker} \Psi = H \cap K$. По теореме о гомоморфизме $K/(H \cap K) \cong KH/H$. □

Лекция 7

Теорема 9. *(Третья теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – сюръективный гомоморфизм, $K = \operatorname{Ker}\varphi$, $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ –подгруппа. Пусть $H = \varphi^{-1}(\widetilde{H})$ – полный прообраз. Тогда*

1) $\widetilde{H} \leftrightarrow H$ – биекция между подгруппами в $\widetilde{G}$ и подгруппами в G, содержащими K.

2) Подгруппа H нормальна в G тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}$ нормальна в $\widetilde{G}$.

3) Если H и $\widetilde{H}$ нормальны, то $G/H \cong \widetilde{G}/\widetilde{H}$.

Доказательство. 1) Для подгруппы $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ обозначим через $\Omega(\widetilde{H}) = H$ подгруппу $\varphi^{-1}(\widetilde{H}) \subset G$. Легко видеть, что $\Omega(\widetilde{H})$ содержит $K = \varphi^{-1}(e)$. Пусть H – подгруппа G, содержащая K, обозначим через $\Theta(H)$ образ $\varphi(H)$, это подгруппа в $\widetilde{G}$. Докажем, что Ω и Θ – взаимно обратные отображения. Для этого надо проверить, что $\Omega \circ \Theta = \mathrm{id}$ и $\Theta \circ \Omega = \mathrm{id}$. Действительно, $\Theta \circ \Omega(\widetilde{H})$ – это образ от полного прообраза $\widetilde{H}$, то есть $\widetilde{H}$. Теперь рассмотрим $\Omega \circ \Theta(H)$ – полный прообраз от образа H. Очевидно, что $H \subset \Omega \circ \Theta(H)$. Пусть $g \in \Omega \circ \Theta(H)$, тогда $\varphi(g) \in \Theta(H)$. Следовательно, есть $h \in H$ такое, что $\varphi(h) = \varphi(g)$. Тогда $\varphi(h^{-1}g) = e$, то есть $h^{-1}g \in K$. Значит $g = hk \in H$. Итак, $\Omega \circ \Theta(H) = H$.

2) Пусть $G \triangleright H$. Рассмотрим $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Так как гомоморфизм φ сюръективный, найдутся $h \in H$ и $g \in G$ такие, что $\varphi(h) = \widetilde{h}$, $\varphi(g) = \widetilde{g}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, а значит, $\widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{g}^{-1} = \varphi(ghg^{-1}) \in \widetilde{H}$. Таким образом, $\widetilde{H} \triangleleft \widetilde{G}$.

Пусть теперь $\widetilde{H} \triangleleft \widetilde{G}$. Рассмотрим $g \in G$, $h \in H$. Тогда $\varphi(g) \in \widetilde{G}$, $\varphi(h) \in \widetilde{H}$, а значит, $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in \widetilde{H}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, то есть $G \triangleright H$.

3) Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\Psi = \pi_{\widetilde{H}} \circ \varphi\colon G \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$. Так как φ и $\pi_{\widetilde{H}}$ – сюръекции, Ψ – также сюръекция. Заметим, что $\Psi(g) = e\widetilde{H}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g) \in \widetilde{H}$, то есть $g \in H$. Получаем, что $\operatorname{Ker}\Psi = H$. По теореме о гомоморфизме получаем $G/H \cong \widetilde{G}/\widetilde{H}$. □

Следствие 3 (Следствие из третьей теоремы о гомоморфизме)**.** *Пусть H и N – две нормальные подгруппы группы G, причем $N \subset H$. Пусть $\pi_N\colon G \to G/N$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi_N(H) \cong H/N$ – нормальная подгруппа в G/N и*

$$(G/N)/\pi_N(H) \cong G/H.$$

Менее формально можно написать

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

Доказательство. Гомоморфизм $\pi_N\colon G \to G/N$ сюръективен. Значит, мы находимся в условиях третьей теоремы о гомоморфизме. Поскольку H – нормальная подгруппа в G, $\pi_N(H)$ – также нормальная подгруппа в G/N. Так как $\operatorname{Ker}\pi_N = N$, $\pi_N(H) \cong H/N$. По пункту 3) третьей теоремы о гомоморфизме

$$G/H \cong (G/N)/\pi_N(H).$$

□

Пример 12. *Рассмотрим нормальные подгруппы $V_4 \subset A_4$ в S_4. По предыдущему следствию получаем $S_4/A_4 \cong (S_4/V_4)(A_4/V_4)$. В самом деле, $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $S_4/V_4 \cong$*

S_3 (см. пример 11), $|A_4/V_4| = 3$, а значит, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$. При этом $\pi_{V_4}(A_4) \cong \mathbb{Z}_3$ – подгруппа в S_3, следовательно, $\pi_{V_4}(A_4) = A_3$. И мы получаем, что

$$(S_4/V_4)(A_4/V_4) \cong S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2.$$

Пусть S – некоторое множество. Рассмотрим множество конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1}, где $s \in S$. (Так как на множестве S нет никакой операции, то s^{-1} – некий формальный символ.) Также мы рассматриваем пустое слово $\varnothing$. Два слова назовем *эквивалентными*, если одно переводится в другое некой конечной цепочкой следующих элементарных преобразований:

1) Если в некотором месте есть пара подряд идущих букв ss^{-1} или $s^{-1}s$, то их можно убрать.

2) В любое место можно вписать пару ss^{-1} или $s^{-1}s$.

Конкатенацией двух слов называется операция приписывания одного слова к другому. Например, $(xyx^{-1})(xzzx) = xyx^{-1}xzzx$.

Лемма 13. *Класс эквивалентности конкатенации слов из двух классов эквивалентности не зависит от выбора представителей в этих классах.*

Доказательство. Пусть слово A эквивалентно слову B, а слово C эквивалентно слову D. Наша задача доказать, что слова AC и BD эквивалентны. Заметим, что мы можем делать с левой частью слова AC те же элементарные преобразования, что и со словом A и получим слово BC. Затем будем делать с правой частью BC те же элементарные преобразования, что и с C. Получим CD. □

Определение 21. *Свободной группой с множеством порождающих S* называется множество классов эквивалентности конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1}, где $s \in S$ с операцией конкатенации. Обозначать эту группу мы будем $\mathfrak{F}(S)$.

Мощность $|S|$ называется *рангом* свободной группы $\mathfrak{F}(S)$.

Замечание 6. Легко видеть, что свободная группа действительно является группой. Ассоциативность конкатенации очевидна. Нейтральный элемент – класс пустого слова. Обратный элемент к каждому слову легко выписать.

Теорема 10. *Пусть G группа с порождающими $g_1, \ldots, g_k$. Существует единственный гомоморфизм из свободной группы $\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_k)$ ранга k в группу G такой, что $\varphi(x_i) = g_i$. Гомоморфизм φ сюръективен.*

Доказательство. Пусть φ переводит класс слова $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_m}^{\varepsilon_m} \in G.$$

Чтобы проверить корректность определения, нужно доказать, что g не зависит от выбора представителя в классе. Если два слова отличаются элементарным преобразованием, то в одном из них есть "дополнительное"$x_i x_i^{-1}$, которое переходит в $g_i g_i^{-1} = e$. Это не меняет образ. То, что φ – гомоморфизм и $\varphi(x_i) = g_i$ очевидно. Сюръективность следует из того, что G порождается $g_1, \ldots, g_k$. □

Определение 22. Пусть M – некоторое подмножество группы G. Нормальное замыкание M – это наименьшая по включению нормальная $N(M)$ в G подгруппа, содержащая M.

Легко видеть, что пересечение нормальных подгрупп – это нормальная подгруппа. Из этого следует, что наименьшая нормальная подгруппа, содержащая M существует.

Лемма 14. *Подгруппа $N(M)$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами gmg^{-1} для всех $m \in M, g \in G$.*

Доказательство. Поскольку $N(M)$ – нормальная подгруппа и $M \subset N(M)$, получаем $gmg^{-1} \in N(M)$, а значит, $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M\rangle \subset N(M)$. С другой стороны $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M\rangle$ – это нормальная подгруппа. В самом деле, $(gmg^{-1})^{-1} = gm^{-1}g^{-1}$. А значит, любой элемент $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M\rangle$ имеет вид

$$(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1}) \qquad \varepsilon_j = \pm 1.$$

При этом

$$g(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1})g^{-1} =$$
$$= (gg_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g^{-1})(gg_2 m_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} g^{-1}) \dots (gg_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1} g^{-1}) \in \langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M\rangle.$$

□

Определение 23. Говорят, что группа G задана образующими $g_1, \dots, g_k$ и соотношениями $g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}, \dots, g_1^{\beta_1} \dots g_k^{\beta_k}$, если для гомоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{F}(x_1, \dots, x_k) \to G$, $x_i \mapsto g_i$ ядро совпадает с $N(x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, \dots, x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k})$. Тогда

$$G \cong \mathfrak{F}(x_1, \dots, x_k)/N(x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, \dots, x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}).$$

В таком случае пишут

$$G = \langle g_1, \dots, g_k \mid g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}, \dots, g_1^{\beta_1} \dots g_k^{\beta_k}\rangle.$$

Пример 13. *Докажем, что $D_n = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n\rangle$.*

Ясно, что D_n порождается двумя симметриями с минимальным углом между ними. Их композиция – это поворот на $\frac{2\pi}{n}$. Если обозначить эти симметрии a и b, то ясно, что $a^2 = b^2 = (ab)^n = e$. То есть для $\varphi\colon \langle x_1, x_2\rangle \to D_n$, $x_1 \mapsto a, x_2 \mapsto b$ ядро содержит $N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Наша цель – доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi = N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Если это не так, то по следствию 3 имеем:

$$G \cong \langle x_1, x_2\rangle/\operatorname{Ker}\varphi \cong (\langle x_1, x_2\rangle/N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n))/(\operatorname{Ker}\varphi/N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)).$$

Тогда порядок группы G будет строго меньше, чем $H = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n\rangle = \langle x_1, x_2\rangle/N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Докажем, что в H не более $2n$ элементов. Легко видеть, что любой элемент H может быть записан либо в виде конечного слова $abab\dots$, либо в виде $baba\dots$. Действительно, $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, значит, любое слово от a, b, a^{-1}, b^{-1} – это слово от a и b. При этом если есть сочетание aa или bb, то его можно сократить. Поскольку $(ab)^n = e$, среди слов $abab\dots$ различными являются слова длины $0, 1, 2 \dots, 2n-1$. С другой стороны $ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$. Значит, $(ba)^n = e$ и среди слов $baba\dots$ также различными являются слова длины $0, 1, 2 \dots, 2n-1$. Осталось заметить, что

$$b = (ab)^n b = (ab)^{n-1}a;$$
$$ba = (ab)^n ba = (ab)^{n-1};$$
$$\vdots$$
$$(ba)^{n-1}b = (ab)^n(ba)^{n-1}b = a.$$

Таким образом, все слова вида $baba\dots$ представляются словами вида $abab\dots$. Значит, $|H| \leq 2n$. Отсюда следует, что $D_n = H$.

Лекция 8

Проблема равенства слов. Пусть S – некоторое множество. И пусть даны два конечных слова от букв $s_i \in S$ и s_i^{-1}. Возникает вопрос: эквивалентны ли эти два слова, то есть дают ли они один и тот же элемент свободной группы $\mathfrak{F}(S)$? Этот вопрос называется проблеммой равенства слов.

Один из способов решить проблему равенства слов – это определить некий канонический вид, к которому можно привести каждое слово, причем этот вид должен быть единственным. Если этот подход будет реализован, то для проверки эквивалентности двух слов нужно оба слова привести к каноническому виду и сравнить результаты.

Напомним, что слова называются эквивалентными, если от одного до другого можно добраться следующими элементарными преобразованиями: можно сокращать подряд идущие пары символов типа xx^{-1} или $x^{-1}x$, а также можно приписывать в любое место слова пары символов xx^{-1} или $x^{-1}x$. Преобразования первого типа назовем *сокращениями*, а второго – *приписываниями*. Любое слово можно сокращениями привести к *несократимому виду*, то есть к виду, в котором нет подряд идущих сочетаний вида xx^{-1} и $x^{-1}x$.

Теорема 11. *В каждом классе эквивалентности есть только одно несократимое слово.*

Доказательство. Пусть есть два различных несократимых слова u и v, которые эквивалентны. Рассмотрим цепочку элементарных преобразований, переводящих u в v. Пусть в этой цепочке есть сокращение, идущее после приписывания. Докажем, что эту пару можно заменить либо на пару сокращение, а затем приписывание, либо убрать. В самом деле если ни один из сокращенных символов не совпадает с только что приписанными, то можно поменять эти две операции. Остается случай, когда было приписывание xx^{-1}, а затем сокращение, использующее один или оба из приписанных символов. Но тогда в результате этих двух операций слово не поменялось и можно эту пару убрать. Назовем такую замену одной пары другой (или убирание пары) перестройкой.

Для цепочки элементарных преобразований рассмотрим сумму позиций, на которых стоят сокращения. (То есть в цепочке "сокращение, приписывание, приписывание, сокращение, сокращение"сокращения стоят на 1, 4 и 5 местах и сумма равна 10.) При перестройке данная сумма уменьшается. Следовательно, не возможно бесконечное число перестроек и за конечное число перестроек мы достигнем цепочки, в которой сначала идут несколько сокращений, а затем несколько приписываний. Однако слово u несократимо. Значит, цепочка не могла начинаться с сокращений. Тогда она состоит только из приписываний. Но это противоречит несократимости слова v. □

Замечание 7. Можно поставить аналогичный вопрос равенства слов не только в свободной группе, но и в группе с соотношениями. В этом случае слова эквивалентны не только, когда они различаются цепочкой сокращений и приписываний, но также можно вставлять в любое место или убирать любые элементы из $N(r_1, \ldots, r_k)$, где r_i – соотношения. Оказывается, что проблема равенства слов может стать гораздо сложнее, более того она не всегда резрешима. Более точно, существует конечно порожденная группа с конечным числом соотношений, в которой проблема равенства слов алгоритмически не разрешима.

Напомним, что прямым произведением групп K и H мы называли множество пар $(k,h) \mid k \in K, h \in H$ с покомпонентным умножением. Назовем такое прямое произведение *внешним*.

Определение 24. Пусть K и H – нормальные подгруппы в группе G такие, что $K \cap H = \{e\}$ и G порождается подгруппами K и H. Тогда G называется *внутренним прямым произведением* подгрупп H и K.

Лемма 15. *1) Внешнее прямое произведение групп K и H является внутренним прямым произведением подгрупп $K \times \{e\}$ и $\{e\} \times H$.*

2) Пусть K и H – подгруппы в G. И пусть группа G – это внутреннее прямое произведение подгрупп K и H. Тогда G изоморфно внешнему прямому произведению $K \times H$.

Доказательство. 1) Рассмотрим подгруппы $K \times \{e\} = \{(k,e) | k \in K\}$ и $\{e\} \times H = \{(e,h) | h \in H\}$ во внешнем прямом произведении $K \times H$. (Проверку, что это подгруппы оставляю читателю.) Тогда

$$(a,b)(k,e)(a,b)^{-1} = (a,b)(k,e)(a^{-1},b^{-1}) = (aka^{-1}, beb^{-1}) = (aka^{-1}, e) \in K \times \{e\}.$$

Значит, подгруппа $K \times \{e\}$ нормальна в $K \times H$. Аналогично, подгруппа $\{e\} \times H$ нормальна в $K \times H$. Пересечение этих подгрупп – это единственный элемент (e,e), являющийся нейтральным элементом группы. Кроме того, любой элемент (k,h) есть произведение элементов (k,e) и (e,h), то есть эти подгруппы порождают $K \times H$. Таким образом, группа $K \times H$ является внутренним прямым произведением подгрупп $K \times \{e\}$ и $\{e\} \times H$.

2) Так как группа G порождена подгруппами K и H и подгруппа H нормальна, то по лемме 12 любой элемент $g \in G$ представляется в виде $g = kh$. Значит отображение

$$\varphi \colon K \times H \to G, \qquad \varphi(k,h) = kh$$

сюръективно. Докажем, что φ – изоморфизм групп.

Предположим, что $k_1 h_1 = k_2 h_2$. Тогда, умножая слева на k_2^{-1}, а справа – на h_1^{-1}, получаем $k_2^{-1} k_1 = h_2 h_1^{-1} \in K \cap H$. Следовательно, $k_2^{-1} k_1 = h_2 h_1^{-1} = e$, то есть $k_1 = k_2$ и $h_1 = h_2$. Итак, представление $g = kh$ единственно. Это означает инъективность φ.

Осталось проверить, что φ – гомоморфизм. Пусть теперь $k_1, k_2 \in K$ и $h_1, h_2 \in H$. Докажем, что $h_1 k_2 h_1^{-1} k_2^{-1} = e$. В самом деле так как K – нормальная подгруппа, $h_1 k_2 h_1^{-1} = \widehat{k} \in K$, с другой стороны, так как H – нормальна подгруппа, $k_2 h_1^{-1} k_2^{-1} = \widehat{h} \in H$. Тогда

$$h_1 k_2 h_1^{-1} k_2^{-1} = h_1 \widehat{h} = \widehat{k} k_2^{-1} \in K \cap H = \{e\}.$$

Итак, $h_1 k_2 h_1^{-1} k_2^{-1} = e$. Значит, $h_1 k_2 = k_2 h_1$. Но тогда

$$\varphi(k_1,h_1)\varphi(k_2,h_2) = k_1 h_1 k_2 h_2 = k_1 k_2 h_1 h_2 = \varphi(k_1 k_2, h_1 h_2).$$

□

В дальнейшем мы не будем различать внутренннее и внешнее прямые произведения и будем использовать единый термин "прямое произведение".

Теорема 12 (Теорема о факторизации прямого произведения)**.** *Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – группы. В каждой группе G_i фиксируем нормальную подгруппу H_i. Тогда $H_1 \times \ldots \times H_k$ является нормальной подгруппой $G_1 \times \ldots \times G_k$ и*

$$(G_1 \times \ldots \times G_k)/(H_1 \times \ldots \times H_k) \cong G_1/H_1 \times \ldots \times G_k/H_k.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon G_1 \times \ldots \times G_k \to G_1/H_1 \times \ldots \times G_k/H_k,$$

$$\varphi\colon (g_1, \ldots, g_k) \mapsto (g_1H_1, \ldots, g_kH_k).$$

Легко видеть, что φ – это сюръективный гомоморфизм, ядро которого совпадает с $H_1 \times \ldots \times H_k$. Это доказывает оба утверждения. □

Замечание 8. Так же как в случае абелевой группы мы используем аддитивные обозначения, если группы A и B абелевы, то прямое произведение групп A и B мы будем называть *прямой суммой* и обозначать $A \oplus B$.

Теорема 13 (Китайская теорема об остатках.)**.** *Пусть m и n – натуральные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) НОД$(m, n) = 1$;

2) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Рассмотрим

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n, \qquad \varphi(u) = (u \bmod m, u \bmod n).$$

Докажем, что φ – изоморфизм. Из определения видно, что φ переводит сложение в сложение, то есть является гомоморфизмом.

Пусть $u \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда u делится и на m, и на n. Значит, так как m и n взаимно просты, u делится на mn. То есть u равен нулю по модулю mn. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, а значит, гомоморфизм φ инъективен. Но поскольку $|\mathbb{Z}_{mn}| = |\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n|$ из инъективности φ следует его биективность. Итак, φ – изоморфизм.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть НОД$(m, n) = d > 1$. Тогда для любого элемента $(a, b) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ выполнено

$$\frac{mn}{d}(a, b) = \text{НОК}(m, n)(a, b) = (0, 0).$$

Значит, любой элемент в $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ имеет порядок не больше $\frac{mn}{d}$, то есть нет элемента из $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, порядок которого равен mn. Значит, группа $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ не циклическая и не изоморфна $\mathbb{Z}_{mn}$. □

Для абелевых групп будем использовать аддитивную терминологию. Операцию будем обозначать "+"и называть сложением. Нейтральный элемент называем нулем. При этом степень g^k элемента g, будет обозначатся kg.

Замечание 9. То, что абелева группа A порождается подмножеством $S \subset A$ означает, что каждый элемент $a \in A$ представляется в виде $a = k_1s_1 + \ldots + k_ns_n$, где $s_i \in S$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

Мы почти всегда будем ограничиваться рассмотрением только конечно порожденных абелевых групп, то есть таких групп A, для которых множество S может быть выбрано конечным.

Определение 25. Система элементов S абелевой группы A называется *линейно независимой* (над $\mathbb{Z}$), если из того, что $k_1s_1 + \ldots + k_ns_n = 0$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$, $s_i \in S$, следует что все k_i равны нулю.

Определение 26. *Базис* абелевой группы – это линейно независимая система порождающих этой группы.

Заметим, что не у всякой группы есть базис. Например, у группы $\mathbb{Z}_n$ базиса нет, так как для любой системы $\{s_1, \ldots, s_k\}$ выполнено $ns_1 = 0$, что противоречит линейной независимости этой системы.

Определение 27. Пусть в абелевой группе A есть базис $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$. Тогда группа A называется *свободной абелевой группой*. Будем обозначать эту группу

$$\mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n, \ldots).$$

Если базис конечен и имеет мощность n, то будем говорить, что A – свободная абелева группа ранга n и обозначать $\operatorname{rk} A = n$.

Задача 5. Докажите, что

$$\mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n) = \langle e_1, \ldots, e_n \mid e_i e_j e_i^{-1} e_j^{-1}, 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Лемма 16. *Пусть в абелевой группе A есть базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда любой другой базис этой группы также состоит из n элементов. (То есть ранг свободной абелевой группы определен однозначно.)*

Доказательство. Пусть в группе A есть другой базис $\{e'_1, \ldots, e'_m, \ldots\}$ и количество элементов в нем не равно n. Без ограничения общности мы можем считать, что в нем больше, чем n элементов. Рассмотрим $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ Так как $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис, каждый элемент e'_j выражается через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ с целыми коэффициентами: $e'_j = c_{1j}e_1 + \ldots + c_{nj}e_n$. Можно собрать все коэффициенты c_{ij} в целочисленную матрицу C размера $n \times n+1$ такую, что

$$(e'_1, \ldots, e'_{n+1}) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Интерпретируем столбцы $C^{(1)}, \ldots, C^{(n+1)}$ матрицы C как векторы из пространства $\mathbb{Q}^n$ строк с рациональными коэффициентами длины n. Тогда столбцы – это $n+1$ векторов в n-мерном векторном пространстве. По основной лемме о линейной зависимости столбцы C линейно зависимы, то есть есть рациональные числа $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ не все равные нулю такие, что

$$\frac{p_1}{q_1}C^{(1)} \ldots + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}C^{(n+1)} = 0.$$

Домножим это равенство на произведение знаменателей и получим

$$k_1 C^{(1)} \ldots + k_{n+1} C^{(n+1)} = 0$$

для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$ не всех равных нулю. Но тогда $k_1 e'_1 + \ldots + k_{n+1} e'_{n+1} = 0$, что противоречит линейной независимости $\{e'_1, \ldots, e'_{n+1}, \ldots\}$. □

Замечание 10. Пусть $F = \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $F = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. В самом деле, сопоставим элементу $k_1 e_1 + \ldots k_n e_n \in \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$ элемент $(k_1 e_1, \ldots, k_n e_n) \in \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle$. Легко проверить, что это изоморфизм.

Лекция 9

Предложение 8. *Подгруппа L свободной абелевой группы F ранга n – это свободная абелева группа ранга $m \leq n$.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по n.

База индукции $n = 1$. $F \cong \mathbb{Z}$. По теореме 5(2) подгруппа в $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}$. При $k \neq 0$ это свободная абелева группа ранга 1. Если же $k = 0$ получаем свободную абелеву группу ранга ноль.

Шаг индукции. Пусть для $n < k$ утверждение доказано. Рассмотрим

$$P = \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_{n-1}) \subset F.$$

Обозначим $B = P \cap L$. Так как P – свободная группа ранга $n-1$, по предположению индукции $B \subset P$ – свободная абелева группа ранга не более $n-1$. Если $L \subset P$, то $L = B$ – свободная абелева группа ранга не более $n-1$. Пусть $L \neq B$. Рассмотрим гомоморфизм $\pi\colon F \to \mathbb{Z}$, $\pi(k_1e_1 + \ldots + k_ne_n) = k_n$. Тогда образ π – циклическая группа и найдется $l \in L$ такой, что $\operatorname{Im}\pi = \langle\pi(l)\rangle$. Пусть $s = t_1e_1 + \ldots t_ne_n \in L$. Тогда $\pi(s) \in \langle\pi(s)\rangle$. То есть $\pi(s) = q\pi(s)$ для некоторого целого q. Получаем $\pi(s - ql) = 0$, то есть $s - ql \in B$. Значит, $s \in B \oplus \langle l\rangle$ (данные две подгруппы пересекаются только по нулю, так как $\pi(l) \neq 0$). Получаем $L = B \oplus \langle l\rangle$ – свободная абелева группа ранга $\operatorname{rk} B + 1 \leq n$. □

Теорема 14 (Универсальное свойство свободной абелевой группы)**.** *Пусть A – абелева группа с образующими $a_1, \ldots, a_n$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \to A,$$

причем $\varphi(x_i) = a_i$.

Доказательство. Подходит гомоморфизм определенный по правилу

$$\varphi(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) = k_1a_1 + \ldots + k_na_n.$$

□

Применяя теорему о гомоморфизме, получаем следствие.

Следствие 4. *Каждая конечно порожденная абелева группа изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы по некоторой подгруппе (ядру гомоморфизму φ).*

Опишем все базисы данной свободной абелевой группы через один фиксированный базис.

Определение 28. Обозначим через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ множество целочисленных матриц $n \times n$, обратные к которым также являются целочисленными.

Замечание 11. Множество $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ является группой по умножению матриц. В самом деле, умножение двух целочисленных матриц A и B дает целочисленную матрицу, обратная к которой равна $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, а значит, целочисленная. Таким образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ замкнуто относительно умножения. Замкнутость относительно взятия обратного элемента очевидна. Также $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Мы проверили, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ – подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

Лемма 17. *Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ состоит из целочисленных матриц с определителем ± 1*

Доказательство. У целочисленной матрицы целый определитель. Значит, если $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, то $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$. Но $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$. Значит, $\det A = \pm 1$.

Напротив, если для целочисленной матрицы выполнено $\det A = \pm 1$, то применяя формулу через алгебраические дополнения, получаем, что обратная матрица A^{-1} также является целочисленной. □

Предложение 9. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис свободной абелевой группы F. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ – базис F;

2) $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис F, каждый вектор выражается через $\{e_1, \dots, e_n\}$. Значит, $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C – некоторая целочисленная матрица $n \times n$. Аналогично $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)D$ для некоторой целочисленной матрицы D. Тогда $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)CD$. Так как $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис, получаем $CD = E$. Значит, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

$2 \Rightarrow 1$. Для любого $f \in F$ выполняется

$$f = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом любой элемент f выражается через $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Так как матрица C невырожденная, система $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ линейно независима над $\mathbb{Z}$. Значит, это базис F. □

Примерами матриц из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ являются матрицы следующих элементарных преобразований:

1) прибавление одной строки к другой с целым коэффициентом,

2) смена двух строк местами

3) умножение строки на -1.

Таким образом, переходя от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e_1, \dots, e_n)C$ мы можем делать данные элементарные преобразования с данным базисом. Назовем данные элементарные преобразования базиса *допустимыми*.

Рассмотрим пару состоящую из свободной абелевой группы $F = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ и ее подгруппы $L = \mathcal{A}(y_1, \dots, y_m)$, $m \leq n$. Тогда

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)P,$$

где P – целочисленная матрица размера $n \times m$.

Теорема 15 (Теорема о согласованных базисах)**.** *Существует такой базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ группы F и такие натуральные числа $u_1, \dots u_m$, что u_i делится на u_j при $i > j$, и система $\{u_1 e_1, \dots, u_m e_m\}$ является базисом L.*

Доказательство. Будем делать элементарные преобразования с базисами группы F и подгруппы L. Пусть $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)C$, $(y'_1, \dots, y'_m) = (y_1, \dots, y_m)D$, тогда равенство $(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)P$ дает $(y'_1, \dots, y'_m) = (x'_1, \dots, x'_n)C^{-1}PD$. При умножении P слева на матрицу C^{-1} и справа на матрицу D происходят допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P. Далее утверждение теоремы следует из следующей леммы.

Лемма 18. *Пусть P – целочисленная матрица $n \times m$. Делая допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P можно привести P к виду*

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Причем если $i > j$, то u_i делится на u_j.

Доказательство леммы. Если не все коэффициенты матрицы равны нулю, то перестановкой строк и столбцов можно поставить на место p_{11} ненулевой элемент с минимальным модулем. Далее будем уменьшать минимальный модуль ненулевого элемента пока это будет возможно.

Случай 1. В первой строке матрицы P есть элемент p_{1i} не делящийся на p_{11}. Поделим p_{1i} на p_{11} с остатком: $p_{1i} = qp_{11} + r$, $0 < |r| < |p_{11}|$. Прибавим первый столбец к i-му с коэффициентом $-q$. На месте p_{1i} получим r. Таким образом мы уменьшили модуль минимального по модулю ненулевого элемента.

Случай 2. В первом столбце матрицы P есть элемент p_{i1} не делящийся на p_{11}. Прибавляя 1-ю строку к i-ой с нужным коэффициентом получаем элемент с модулем меньше $|p_{11}|$ в первом столбце.

Случай 3. Все элементы первой строки и первого столбца делятся на p_{11}, но есть p_{ij}, не делящийся на p_{11}. Прибавим первую строку и первый столбец к остальным так, чтобы все элементы, кроме p_{11} стали равны нулю. При этом p_{ij} все равно не будет делиться на p_{11} (к нему прибавилось нечто делящееся на p_{11}). Прибавим i-ю строку к первой и попадем в случай 1.

Так как бесконечно уменьшать модуль минимального ненулевого элемента мы не можем, рано или поздно получится ситуация, когда все элементы p_{ij} делятся на p_{11}. Тогда можно сделать все элементы первой строки и первого столбца нулевыми. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2m} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Далее работаем аналогичным образом с матрицей без первой строки и первого столбца. При этом элементарные преобразования строк со 2 по n-ю и столбцов со 2-го по m-ый не меняет того, что все элементы p_{ij} делятся на u_1. В итоге получаем нужный вид матрицы. □

Замечание 12. Легко доказать, что при допустимых элементарных преобразованиях НОД всех элементов матрицы не меняется. Поэтому u_1 равен НОД всех элементов матрицы.

□

Следствие 5. *Любая конечно порожденная абелева группа изоморфна*

$$\mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z},$$

где u_i делится на u_j, если $i > j$.

Доказательство. Пусть A – конечно порожденная абелева группа. По теореме 14 существует сюръективный гомоморфизм φ из свободной абелевой группы F конечного ранга n в группу A. Применим теорему о согласованных базисах к паре $\operatorname{Ker}\varphi \subset F$. Получаем

$$F = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle,$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_m e_m \rangle \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}.$$

Применяя теорему о факторизации прямого произведения, получаем

$$A \cong F/\operatorname{Ker}\varphi \cong \langle e_1\rangle/\langle u_1 e_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_m\rangle/\langle u_m e_m\rangle \oplus \langle e_{m+1}\rangle/\{0\} \oplus \ldots \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Назовем такую форму записи A *первой канонической формой абелевой группы.*

Определение 29. Абелева группа называется примарной, если она имеет порядок p^a, где p – простое число, $a \in \mathbb{N}$.

Применим китайскую теорему об остатках к группе $\mathbb{Z}_u$. Пусть $u = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\mathbb{Z}_u \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Применив это к каждрому слагаемому первой канонической формы абелевой группы A и переупорядочив слагаемые, получим *вторую каноническую форму группы* A

$$\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Здесь каждое простое число может несколько раз встречаться в одной и той же степени в качестве порядка циклического слагаемого.

Наша цель – доказать что первая и вторая канонические формы действительно канонические (то есть одну группу нельзя представить двумя различными способами в такой форме). Начнем со второй формы.

Теорема 16 (Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп)**.** *Пусть A – конечно порожденная абелева группа. Тогда A изоморфна прямой сумме конечного числа циклических групп. Каждая из этих циклических групп либо является бесконечной циклической группой, либо примарной циклической группой. И такое разложение единственно с точностью до перестановки прямых слагаемых.*

Лекция 10

Лемма 19. *Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – группы и $g_i \in G_i$. Тогда*

$$\operatorname{ord}(g_1, \ldots, g_k) = HOK(\operatorname{ord}(g_1), \ldots, \operatorname{ord}(g_k)).$$

Доказательство. $m = \operatorname{ord}(g_1, \ldots, g_k)$ – это минимальное натуральное число такое, что $(g_1, \ldots, g_k)^m = (e, \ldots, e)$. Это означает, что $g_i^m = e$ для всех $1 \le i \le k$. То есть m делится на все $\operatorname{ord}(g_i)$. Минимальное такое число – это $\operatorname{HOK}(\operatorname{ord}(g_1), \ldots, \operatorname{ord}(g_k))$. □

Доказательство. (Доказательство теоремы 16) Существование такого разложения в прямую сумму уже доказано (это и есть вторая каноническая форма). Пусть есть два таких разложения одной и той же группы A. Прежде всего докажем, что количество бесконечных циклических слагаемых в обоих разложениях одинаково. Для этого определим следующую подгруппу

Определение 30. Подгруппа кручения $\operatorname{Tor} A$ (абелевой) группы A – это подгруппа, состоящая из всех элементов конечного порядка.

Прежде всего нужно объяснить, что множество элементов конечного порядка действительно является подгруппой. Для этого заметим, что если $ka = 0$ и $mb = 0$, то $km(a+b) = 0$. То есть множество $\operatorname{Tor} A$ замкнуто относительно сложения. Кроме того $k(-a) = 0$, что означает замкнутость $\operatorname{Tor} A$ относительно взятия противоположного. Осталось заметить, что $0 \in \operatorname{Tor} A$.

Элементы конечного порядка в разложении (1) имеют вид $(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0)$, где в конечных слагаемых идут любые элементы $x_1, \ldots, x_N$, а в бесконечных слагаемых все элементы – нули. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor} A = \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\} \subset \\ \subset \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \ldots \oplus \\ \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} = A.\end{aligned}$$

По теореме о факторизации прямого произведения

$$A/\operatorname{Tor} A \cong \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^r.$$

Таким образом, факторгруппа $A/\operatorname{Tor} A$ – это свободная абелева группа ранга r, где r равно количеству прямых слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}$ в разложении (1). Поскольку определение подгруппы кручения не зависит от разложения и ранг свободной абелевой группы определен однозначно, получаем, что если для группы A есть две вторых канонических формы, то количество прямых слагаемых $\mathbb{Z}$ в них одинаково. Назовем это число *рангом* (абелевой) группы A.

Разложение (1) состоит из второй канонической формы группы $\operatorname{Tor} A$, к которой добавлены $\operatorname{rk} A$ слагаемых $\mathbb{Z}$. Для того, чтобы доказать, что две вторых канонических формы группы A совпадают, осталось доказать, что для группы $\operatorname{Tor} A$ (то есть для конечной группы) нет двух различных вторых канонических формы.

Пусть B – конечная абелева группа. Для любого натурального числа t можно рассмотреть гомоморфизм $\varphi_t \colon B \to B$, $\varphi_t(b) = tb$. Легко видеть, что если $B = B_1 \oplus B_2$, то $\varphi_t(b_1, b_2) = (tb_1, tb_2) = (\varphi_t|_{B_1}(b_1), \varphi_t|_{B_2}(b_2))$. Фиксируем простое число p. Рассмотрим второе каноническое разложение группы B:

$$\begin{aligned}B = \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{q_1^{r_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{r_s}} = \\ = \mathbb{Z}_p^{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^k}^{m_k} \oplus \mathbb{Z}_{q_1^{r_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_s^{r_s}}.\end{aligned}$$

Возьмем $t = p^\alpha$, где p – простое число. Рассмотрим, ядро гомоморфизма φ_t. Пусть некоторый элемент разложения, умноженный на p^α равен нулю. Тогда его координаты лежат в ядрах ограничений гомоморфизма φ_t на каждое слагаемое. При этом ядра ограничений на $\mathbb{Z}_{q_1^{r_1}}, \ldots, \mathbb{Z}_{q_s^{r_s}}$ равны нулю, так как $t = p^\alpha$ и $q_i^{r_i}$ взаимно просты. В группе $\mathbb{Z}_{p^\beta}$ при умножении на p^α в ноль переходит

– вся группа, если $\beta < \alpha$.

– подгруппа $\left\langle p^{\beta-\alpha} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, если $\beta \geq \alpha$.

Отсюда

$$\operatorname{Ker} \varphi_{p^\alpha} = \mathbb{Z}_p^{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}^{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha-1}}^{m_{\alpha-1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^\alpha}^{m_\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{p^\alpha}^{m_{\alpha+1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^\alpha}^{m_k}.$$

Таким образом,

$$|\operatorname{Ker} \varphi_{p^\alpha}| = p^{m_1 + 2m_2 + \ldots + (\alpha-1)m_{\alpha-1} + \alpha(m_\alpha + m_{\alpha+1} + \ldots + m_k)}.$$

Получаем

$$\frac{|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^\alpha}|}{|\mathrm{Ker}\varphi_{p^{\alpha-1}}|} = p^{m_\alpha+m_{\alpha+1}+\ldots+m_k}.$$

Следовательно,

$$p^{m_\alpha} = \frac{|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^\alpha}|}{|\mathrm{Ker}\varphi_{p^{\alpha-1}}|} \cdot \frac{|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^\alpha}|}{|\mathrm{Ker}\varphi_{p^{\alpha+1}}|}$$

То есть

$$m_\alpha = \log_p\left(\frac{|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^\alpha}|^2}{|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^{\alpha+1}}|\cdot|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^{\alpha-1}}|}\right) = \\ = 2\log_p(|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^\alpha}|) - \log_p(|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^{\alpha+1}}|) - \log_p(|\mathrm{Ker}\,\varphi_{p^{\alpha-1}}|).$$

Заметим, что эта формула верна и при $\alpha = 1$, тогда $\varphi_{p^{\alpha-1}} = \mathrm{id}$. Эта формула показывает, что количество слагаемых $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ во втором каноническом разложении конечной абелевой группы B не зависит от этого разложения. Это доказывает теорему.

□

Следствие 6. *Первая каноническая форма конечно порожденной абелевой группы A определена однозначно.*

Доказательство. Пусть есть абелева группа A, у которой есть две различные первые канонические формы Φ_1 и Φ_2. Так как ранг свободной группы $A/\mathrm{Tor}\,A$ определен однозначно, количество прямых слагаемых $\mathbb{Z}$ в этих разложениях одинаково. Значит, эти формы отличаются конечными слагаемыми. Тогда найдется простое число p и его степень k такие, что количество u_i, делящихся на p^k в одной форме (можно считать, что в Φ_1) строго больше, чем в другой (в Φ_2). Напомним, что пользуясь китайской теоремой об остатках можно из первой канонической формы получить вторую. Но тогда во второй канонической форме, полученной из Φ_1 будет больше слагаемых $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ с условием $\alpha \geq k$, чем во второй канонической форме, полученной из Φ_2. Это противоречит теореме 16. □

Определение 31. Экспонента группы G – это минимальное натуральное число k такое, что для любого $g \in G$ выполнено $g^k = e$. Если такого числа не существует, то будем говорить, что экспонента G равна бесконечности. Обозначать экспоненту будем $\exp G$.

Лемма 20. *Экспонента группы равна наименьшему общему кратному порядков элементов. (Имеется в виду, что если есть элемент бесконечного порядка или нет конечного общего кратного у всех порядков, то экспонента бесконечна.)*

Доказательство. Если $g^k = e$, то k делится на $\mathrm{ord}\,g$. Так как $\exp G$ – минимальное натуральное число, что $g^{\exp G} = e$ для всех $g \in G$, получаем, что $\exp G$ – минимальное натуральное число, делящееся на порядки всех элементов. □

Предложение 10 (Критерий цикличности конечной абелевой группы)**.** *Пусть A – конечная абелева группа. Группа A циклическая тогда и только тогда, когда* $\exp A = |A|$.

Доказательство. Пусть A циклическая. Тогда есть элемент, порядок которого равен $|A|$, то есть $\exp A \geq |A|$. Порядки всех элементов – делители $|A|$, значит, $\exp A \leq |A|$. Получаем $\exp A = |A|$.

Пусть наоборот, $\exp A = |A| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, где p_i – простые числа. Так как $\exp A$ – наименьшее общее кратное порядков всех элементов, для каждого $1 \leq j \leq m$ найдется $b_j \in A$ такое, что $\operatorname{ord} b_j = p_j^{k_j} t$, где t не делится на p_j. Обозначим $a_j = tb_j$. Легко видеть, что $\operatorname{ord} a_j = p_j^{k_j}$. Рассмотрим элемент $a = a_1 + \ldots + a_m$, докажем, что его порядок равен $|A|$. Для этого заметим, что $|A|a = 0$ по теореме Лагранжа, но

$$\frac{|A|}{p_j} a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j - 1} \dots p_m^{k_m} (a_1 + \ldots + a_j + \ldots a_m) =$$
$$= 0 + \ldots + 0 + p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j - 1} \dots p_m^{k_m} a_j + 0 + \ldots + 0 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j - 1} \dots p_m^{k_m} a_j \neq 0.$$

А значит, простое число p_j входит в $\operatorname{ord} a$ именно в степени k_j. Так как это выполняется для всех j, порядок a равен $|A|$. Следовательно, группа A циклическая. □

Напомним, что полем называется множество F с двумя бинарными операциями: сложением и умножением, удовлетворяющим следующим аксиомам.

1) $\forall a, b, c \in F$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
2) $\exists\, 0 \in F$: $\forall x$ выполнено $0 + x = x + 0 = x$,
3) $\forall x \in F\ \exists\, (-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$,
4) $\forall a, b \in F$: $a + b = b + a$,
5) $\forall a, b, c \in F$: $(a + b)c = ac + bc$,
6) $\forall a, b, c \in F$: $(ab)c = a(bc)$,
7) $\forall a, b \in F$: $ab = ba$,
8) $\exists\, e \in F$: $\forall x$ выполнено $ex = xe = x$,
9) $\forall x \neq 0 \in F\ \exists\, x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Поле является частным случаем кольца. Мы ранее говорили, что для произвольного кольца R можно рассмотреть группу $(R^\times, \cdot)$, состоящую из всех обратимых по умножению элементов, с операцией множения. Для поля $F^\times = F \setminus \{0\}$ и группа $(F^\times, \cdot)$ называтся *мультипликативной группой поля* F.

Предложение 11. *Конечная подгруппа в мультипликативной группе*

$$F^\times = (F \setminus \{0\}, \cdot)$$

поля F циклическая.

Доказательство. Пусть G – конечная подгруппа в мультипликативной группе поля $F^\times$. Предположим, что G не является циклической. Так как $F^\times$ коммутативна, ее подгруппа G также коммутативна. По предложению 10 экспонента G не равна $|G|$. Значит, $\exp G = k < |G|$. Тогда в поле F у многочлена $x^k - e$ как минимум $|G|$ корней (все элементы группы G являются такими корнями). Однако ненулевой многочлен не может иметь в поле больше корней, чем его степень. В самом деле это следует из того, что, если $f(c) = 0$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x - c$. Получаем противоречие. Следовательно, исходное предположение, что G не циклическая не верно. □

Очевидным следствием предыдущего предложения является следующее утверждение.

Следствие 7. *Мультипликативная группа конечного поля циклическая.*

Определение 32. Пусть G – группа, а X – множество. *Действием* группы G на множестве X называется отображение $\alpha\colon G \times X \to X$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых $g, h \in G$ и $x \in X$ выполнено $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$,
2) для любого $x \in X$ выполнено $\alpha(e, x) = x$.

Если задано действие группы G на множестве X, то говорят, что G *действует* на X и обозначают $G \curvearrowright X$ (в некоторой литературе обозначают $G : X$). При этом $\alpha(g, x)$ называется действием (или применением) элемента g к элементу x, и $\alpha(g, x)$ обозначается $g \cdot x$. В таких обозначениях свойства действия из определения 32 принимают вид:
1) для любых $g, h \in G$ и $x \in X$ выполнено $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$,
2) для любого $x \in X$ выполнено $e \cdot x = x$.

Пример 14. *Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда есть естественное действие симметрической группы S_n на X, заданное по формуле $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.*
То, что это действие сводится к проверкам
1) $\sigma \cdot (\delta \cdot i) = \sigma(\delta(i)) = (\sigma \circ \delta)(i) = (\sigma \circ \delta) \cdot i$,
2) $\mathrm{id} \cdot i = \mathrm{id}(i) = i$.

Пример 15. *Пусть K – поле. Тогда зададим действие $\mathrm{GL}(K) \curvearrowright K^n$ по следующей формуле. Для $A \in \mathrm{GL}(K)$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ положим $A \cdot Y = AY$. Доказательство того, что это действие сводится к проверкам*
1) $A \cdot (B \cdot Y) = ABY = (AB) \cdot Y$,
2) $E \cdot Y = EY = Y$.
Такое действие называется тавтологическим.

Важный частный случай действий – это действия группы на себе, то есть случай, когда $X = G$. Есть три естественных действия $G \curvearrowright G$.

Пример 16. *1)* **Действие G на себе левыми сдвигами.**
По определению $g \cdot \overline{g} = g\overline{g}$.
Тогда $g_1 \cdot (g_2 \cdot \overline{g}) = g_1 g_2 \overline{g} = (g_1 g_2) \cdot \overline{g}$ и $e \cdot \overline{g} = e\overline{g} = \overline{g}$.
2) **Действие G на себе правыми сдвигами.**
По определению $g \cdot \overline{g} = \overline{g} g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \overline{g}) = g_1 \cdot (\overline{g} g_2^{-1}) = (\overline{g} g_2^{-1}) g_1^{-1} = \overline{g} (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot \overline{g},$$
$$e \cdot \overline{g} = \overline{g} \cdot e = \overline{g}.$$

3) **Действие G на себе сопряжениями.**
По определению $g \cdot \overline{g} = g\overline{g}g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \overline{g}) = g_1 \cdot (g_2 \overline{g} g_2^{-1}) = g_1 g_2 \overline{g} g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) \overline{g} (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot \overline{g}.$$
$$e \cdot \overline{g} = e\overline{g}e^{-1} = \overline{g}.$$

Замечание 13. Заметим, что нельзя определить правое действие (действие правыми сдвигами) таким образом $g \cdot \overline{g} = \overline{g} g$, так как при этом

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \overline{g}) = g_1 \cdot (\overline{g} g_2) = \overline{g} g_2 g_1, \qquad (g_1 g_2) \cdot \overline{g} = \overline{g} g_1 g_2.$$

Если группа G не коммутативная, то найдутся два элемента g_1 и g_2 такие, что

$$\overline{g} g_2 g_1 \neq \overline{g} g_1 g_2.$$

Лекция 11

Заметим, что при фиксированном $g \in G$ отображение $\alpha_g \colon X \to X$, $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ является биекцией. В самом деле, легко убедиться, что $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$, при этом $\alpha_e = \mathrm{id}$. Это означает, что $\alpha_{g^{-1}}$ – обратное отображение к α_g. Таким образом, мы получаем гомоморфизм φ_α из G в $S(X)$. Напомним, что $S(X)$ – это группа биекций $X \to X$. Гомоморфизм φ_α определяется следующим образом: $\varphi_\alpha(g) = \alpha_g$.

Наоборот, если дан гомоморфизм $\varphi \colon G \to S(X)$, то можно определить действие α_φ группы G на X следующим образом: $g \cdot x = \varphi(g)(x)$.

Лемма 21. *Отображения $\Phi \colon \alpha \mapsto \varphi_\alpha$ и $\Psi \colon \varphi \mapsto \alpha_\varphi$ являются взаимно обратными и, следовательно, устанавливают биекцию между действиями G на X и гомоморфизмами из G в $S(X)$.*

Доказательство. Пусть β – некоторое действие G на X. Имеем $\Psi \circ \Phi(\beta) = \Psi(\varphi_\beta)$. По определению, это действие устроено по правилу $g \cdot x = \varphi_\beta(g)(x)$. С другой стороны по определению $\varphi_\beta(g) = \beta_g$, то есть $\varphi_\beta(g)(x) = \beta_g(x) = \beta(g, x)$. Таким образом $\Psi \circ \Phi(\beta) = \beta$, то есть $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

Пусть теперь $\varphi \colon G \to S(X)$ – гомоморфизм. Тогда $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \Phi(\alpha_\varphi)$. По определению Φ имеем $\Phi(\alpha_\varphi)(g)(x) = \alpha_\varphi(g, x) = \varphi(g)(x)$. Так как это верно для любого x и для любого g имеем $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \varphi$, то есть $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. □

Следующие два определения играют центральную роль в теории действий.

Определение 33. Пусть G действует на X и $x \in X$. Орбитой элемента x называется множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$.

Определение 34. Пусть G действует на X и $x \in X$. Стабилизатором элемента x называется множество $\mathrm{St}(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Лемма 22. *Орбиты – это классы эквивалентности, и следовательно, орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Докажем, что отношение "$x \sim y$ если x лежит в орбите Gy"является отношением эквивалентности.

1) Рефлексивность. $x \sim x$ так как $e \cdot x = x$, а значит, $x \in Gx$.

2) Симметричность. Если $x \sim y$, то найдется $g \in G$ такое, что $g \cdot y = x$. Значит, $g^{-1} \cdot x = y$, то есть $y \sim x$.

3) Транзитивность. Пусть $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда $x = g \cdot y$, $y = \overline{g} \cdot z$. Тогда $x = (g\overline{g}) \cdot z$. Следовательно, $x \sim z$. □

Лемма 23. *Стабилизатор $\mathrm{St}(x)$ является подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $g, h \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$, то есть $gh \in \mathrm{St}(x)$, а значит, множество $\mathrm{St}(x)$ замкнуто относительно умножения.

Если $g \in \mathrm{St}(x)$, то $g \cdot x = x$. Подействуем на обе части этого равенства элементом g^{-1}. Получим $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$. Но $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x$. Значит, $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$, то есть $\mathrm{St}(x)$ замкнут относительно взятия обратного.

Осталось заметить, что единица группы лежит в стабилизаторе любого элемента. □

Пусть G группа и H – ее подгруппа. Пусть $g \in G$. Через gHg^{-1} мы обозначаем множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Отображение $h \mapsto ghg^{-1}$ устанавливает изоморфизм (биекцию, переводящую умножение в умножение) между H и gHg^{-1}. Следовательно,

gHg^{-1} – подгруппа, изоморфная H. Эта подгруппа называется подгруппой, сопряженной к H.

Лемма 24. *Пусть $y = g \cdot x$. Тогда $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. (Стабилизаторы элементов одной орбиты сопряжены.)*

Доказательство. Докажем, что $\mathrm{St}(y) \supseteq g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. Пусть $h \in \mathrm{St}(x)$. Тогда

$$(ghg^{-1}) \cdot y = (ghg^{-1}) \cdot (g \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y.$$

Но аналогично, так как $x = g^{-1} \cdot y$, имеем $\mathrm{St}(x) \supseteq g^{-1}\mathrm{St}(y)g$. А значит,

$$g\mathrm{St}(x)g^{-1} \supseteq \mathrm{St}(y).$$

Так как доказаны включения в обе стороны, получаем $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. □

Следствие 8. *Если группа G абелева, то стабилизаторы элементов в одной орбите совпадают.*

Теорема 17. *Существует биекция между множеством левых смежных классов группы G по подгруппе $\mathrm{St}(x)$ и элементами орбиты Gx.*

Доказательство. Определим отображение ψ, которое сопоставляет смежному классу $g\mathrm{St}(x)$ элемент орбиты $g \cdot x$. Прежде всего нужно проверить корректность этого отображения, то есть что если $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$, то $g \cdot x = h \cdot x$. В самом деле $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$ тогда и только тогда, когда $h^{-1}g \in \mathrm{St}(x)$, то есть $g = hs$, где $s \in \mathrm{St}(x)$. Получаем $g \cdot x = h \cdot (s \cdot x) = h \cdot x$. Итак, ψ определено корректно.

Пусть $\psi(g\mathrm{St}(x)) = \psi(h\mathrm{St}(x))$, тогда $g \cdot x = h \cdot x$. Подействуем на последнее равенство элементом h^{-1}. Получим $(h^{-1}g) \cdot x = x$, то есть $h^{-1}g \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$, то есть ψ – инъекция.

То, что ψ сюръективно следует из того, что в элемент орбиты $g \cdot x$ переходит смежный класс $g\mathrm{St}(x)$. □

Следствие 9. *Пусть G – конечная группа. Тогда $|G| = |Gx| \cdot |\mathrm{St}(x)|$.*

С помощью только что доказанной формулы посчитаем количество элементов в группе вращений куба $\mathrm{Sym}_+(K)$. Данная группа состоит из всех движений $\mathbb{R}^3$, сохраняющих ориентацию. (Так как центр куба остается неподвижен, то движение, сохраняющее куб является линейным преобразованием. Ориентацию сохраняют те движения, определитель которых равен 1.)

Предложение 12. *Порядок группы $\mathrm{Sym}_+(K)$ равен 24.*

Доказательство. Рассмотрим куб K с вершинами $ABCDA'B'C'D'$. Есть естественное действие $\mathrm{Sym}_+(K)$ на множестве $\{A, B, C, D, A'B'C'D'\}$. В группе $\mathrm{Sym}_+(K)$ содержится вращение относительно оси, соединяющей две противоположные грани. С помощью композиции таких вращений можно перевести любую вершину в любую другую. Значит, орбита точки A состоит из 8 точек. По следствию 9 получаем

$$|\mathrm{Sym}_+(K)| = |\mathrm{Sym}_+(K)A| \cdot |\mathrm{St}(A)| = 8 \cdot |\mathrm{St}(A)|.$$

Осталось найти $|H|$, где $H = \mathrm{St}(A)$. Пусть вершины, смежные с A – это B, D и A'. Получаем естественное действие H на множестве $\{B, D, A'\}$. Легко видеть, что в группе H лежат вращения относительно диагонали AC' на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Они переводят B в D и A' соответственно. Значит, действие H на $\{B, C, D\}$ имеет единственную орбиту $|HB| = 3$. При этом по следствию 9 получаем

$$|H| = |HB| \cdot |\mathrm{St}_H(B)| = 3|\mathrm{St}_H(B)|.$$

(Здесь мы используем индекс в $\mathrm{St}_H(B)$, чтобы подчеркнуть, что это стабилизатор при действии группы H, а не при действии группы G.) Осталось найти $|\mathrm{St}_H(B)|$. Пусть $\xi \in |\mathrm{St}_H(B)$. Тогда $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Поскольку смежные с A вершины – это B, D и A', получаем, что либо $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$, либо $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$. Но если $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$, то ψ меняет ориентацию. Следовательно, $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$, $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$. То есть ψ сохраняет 4 точки не лежащие в одной плоскости. Значит, $\psi = \mathrm{id}$. Следовательно, $|\mathrm{St}_H(B)| = 1$. Таким образом

$$|\mathrm{Sym}_+(K)| = 8 \cdot |\mathrm{St}(A)| = 24 \cdot |\mathrm{St}_H(B)| = 24.$$

□

Теперь разберемся более подробно с группой $\mathrm{Sym}_+(K)$ вращений куба.

Предложение 13. *Группа вращений куба изоморфна S_4.*

Доказательство. Группа $\mathrm{Sym}_+(K)$ действует на множестве диагоналей куба. (Очевидно, что любой элемент этой группы переводит диагонали в диагонали, то есть производит перестановку диагоналей. При этом композиция элементов дает композицию перестановок.) То есть мы имеем гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{Sym}_+(K) \to S_4$. Поскольку $|\mathrm{Sym}_+(K)| = |S_4| = 24$, для того, чтобы доказать, что φ – изоморфизм достаточно доказать, что φ – сюръекция. Пусть K – середина ребра AA', а L – середина ребра CC'. Рассмотрим ξ вращение на π вокруг KL. Ясно, что $\xi \in \mathrm{Sym}_+(K)$.

$$\xi(A) = A', \xi(A') = A, \xi(C) = C', \xi(C') = C, \xi(B) = D', \xi(D') = B, \xi(B') = D, \xi(D) = B'.$$

Значит, применение ξ меняет местами диагонали AC' и $A'C$ и оставляет на месте диагонали BD' и $B'D$. То есть образ ξ в S_4 – это транспозиция. Но аналогично мы можем доказать, что любая транспозиция лежит в образе φ. Поскольку S_4 порождается транспозициями, φ – сюръекция. □

Аналогично докажем другую геометрическую реализацию группы S_4. Напомним, что группа симметрий фигуры – это группа всех движений пространства (для плоской фигуры – плоскости), сохраняющих данную фигуру. (Группа симметрий не состоит только из симметрий относительно плоскостей/прямых!)

Предложение 14. *Группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4.*

Доказательство. Группа симметрий правильного тетраэдра действует на множестве его вершин (их 4). получаем гомоморфизм из этой группы в S_4. Этот гомоморфизм инъективен, так как у него тривиальное ядро. В самом деле, если некое преобразование плоскости лежит в ядре, то оно оставляет на месте вершины тетраэдра (4 точки, не лежащие в одной плоскости), а значит, это тождественное преобразование. Теперь докажем сюръективность данного гомоморфизма. Рассмотрим симметрию относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра. Данная симметрия меняет ровно 2 вершины. Значит, в образе нашего гомоморфизма лежат транспозиции. Так как они порождают S_4, гомоморфизм сюръективен. Итак, мы построили гомоморфизм из группы симметрий правильного тетраэдра в S_4, который является биекцией, то есть изоморфизмом. □

Определение 35. *Ядро неэффективности* действия $\alpha\colon G \times X \to X$ – это множество $\mathrm{Ker}\,\alpha = \{g \in G \mid \forall x \in X :\ g \cdot x = x\}$. Если ядро действия состоит только из единицы группы G, то действие называется *эффективным*.

Из определения следует, что ядро неэффективности совпадает с пересечением всех стабилизаторов всех элементов $x \in X$.

Лемма 25. *Ядро неэффективности действия α является нормальной подгруппой в группе G.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $\operatorname{Ker}\alpha$ совпадает с ядром гомоморфизма $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$. □

Предложение 15. *Действия группы G на X с ядром неэффективности, содержащим H, находятся в биекции с действиями G/H на X.*

Доказательство. Пусть $\varphi_\alpha\colon G \to S(X)$ – гомоморфизм, соответствующий α. При этом $H \subset \operatorname{Ker}\alpha$. Рассмотрим $\psi\colon G/H \to S(X)$, $\psi(gH) = \varphi(g)$. Проверим, что ψ определено корректно, то есть что если $gH = \overline{g}H$, то $\varphi(g) = \varphi(\overline{g})$. В самом деле если $gH = \overline{g}H$, то $g^{-1}\overline{g} = h \in H$. Тогда $\overline{g} = gh$ и $\varphi(\overline{g}) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$.

Отображение ψ является гомоморфизмом, так как

$$\psi((g_1H)\cdot(g_2H)) = \psi(g_1g_2H) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1H)\psi(g_2H).$$

Гомоморфизм ψ соответствует действию α_ψ группы G/H на X.

Напротив, если дано действие $G/H \curvearrowright X$, то ему соответствует гомоморфизм $\psi\colon G/H \to S(X)$. Если взять композицию с каноническим гомоморфизмом

$$\pi_H\colon G \to G/H,$$

то получим гомоморфизм $\varphi = \psi \circ \pi_H\colon G \to S(X)$. Последний гомоморфизм соответствует действию G на X. Поскольку $\operatorname{Ker}\pi_H = H$, ядро ψ содержит H, а значит, H содержится в ядре неэффективности полученного действия G на X. □

Определение 36. Действия $\alpha\colon G\times X \to X$ и $\beta\colon G\times Y \to Y$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\psi\colon X \to Y$ такие, что $\beta(g, \psi(x)) = \psi(\alpha(g, x))$ для любых $g \in G$ и $x \in X$.

Определение 37. Действие $G \curvearrowright X$ называется *транзитивным*, если у него ровно одна орбита, то есть если для любых $x, y \in X$ существует $g \in G$ такое, что $g \cdot x = y$.

Как уже было упомянуто, ядро неэффективности действия – это пересечение всех стабилизаторов. Действие эффективно, если пересечение всех стабилизаторов состоит только из единицы.

Определение 38. Действие называется *свободным*, если стабилизатор каждого элемента $x \in X$ тривиален, то есть равен $\{e\}$.

Теорема 18. *Любое свободное транзитивное действие группы G на некотором множестве изоморфно действию G на себе левыми сдвигами.*

Доказательство. Пусть $\beta\colon G \times X \to X$ – свободное транзитивное действие. Пусть $\alpha\colon G \times G \to G$, $g \cdot g' = gg'$ – действие G правыми сдвигами на себе. Рассмотрим любой элемент $y \in X$. Определим отображение $\psi\colon G \to X$ по формуле

$$\psi(g) = \beta(g, y) = g \cdot y.$$

Докажем, что ψ – биекция. Сюръективность ψ следует из того, что действие β транзитивно. Проверим инъективность. Пусть $\psi(g) = \psi(g')$. Тогда $g \cdot y = g' \cdot y$. Следовательно, $(g^{-1}g) \cdot y = y$, то есть $g^{-1}g' \in \operatorname{St}(y)$. Но так как действие β свободно, получаем $\operatorname{St}(y) = \{e\}$, а значит, $g^{-1}g' = e$, то есть $g = g'$.

Имеем

$$\beta(g, \psi(\overline{g})) = \beta(g, \overline{g} \cdot y) = g \cdot (\overline{g} \cdot y) = (g\overline{g}) \cdot y.$$

С другой стороны

$$\psi(\alpha(g, \overline{g})) = \psi(g\overline{g}) = (g\overline{g}) \cdot y.$$

Таким образом,

$$\beta(g), \psi(\overline{g})) = \psi(\alpha(g, \overline{g})),$$

то есть действия α и β изоморфны. □

Теперь рассмотрим действие группы G на себе сопряжениями. Орбиты и стабилизаторы при этом действии имеют отдельные названия. Орбиты называются *классами сопряженности*, а стабилизаторы – *централизаторами*. Класс сопряженности элемента $g \in G$ обозначается $C(g)$, а централизатор элемента g обозначается $Z(g)$. Следствие 9, примененное к действию G на себе сопряжениями, дает формулу $|C(g)| \cdot |Z(g)| = |G|$.

Замечание 14. Заметим, что и класс сопряженности и централизатор зависят не только от самого элемента g, но и от того, элементом какой группы он рассматривается. Путаница может произойти, например, в случае, когда в группе G есть подгруппа H. Тогда любой элемент $h \in H$ можно рассматривать как элемент G, а можно – как элемент H. Чтобы различать эти ситуации будем там, где это необходимо писать группу в качестве индекса. При этом может так случиться, что $C_G(g) \neq C_H(g)$ и $Z_G(g) \neq Z_H(g)$. Однако легко видеть, что всегда имеются включения в одну сторону: $C_H(g) \subset C_G(g)$, $Z_H(g) \subset Z_G(g)$.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Лемма 26. *Подгруппа $H \subset G$ является нормальной тогда и только тогда, когда H состоит из классов сопряженности. (Имеется в виду, что каждый класс сопряженности либо целиком содержится в H, либо целиком содержится в дополнениии к H.)*

Доказательство. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда для любых $h \in H$ и $g \in G$ выполнено $ghg^{-1} \in H$. То есть для любого $h \in H$ выполнено $C(h) \subset H$. □

Для того, чтобы описывать нормальные подгруппы (и для других целей) бывает удобно явно описать классы сопряженности в группе. Сделаем это для группы S_n. Назовем *цикловой структурой* перестановки $\sigma \in S_n$ неупорядоченный набор длин независимых циклов этой перестановки.

Лемма 27. *Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $C_{S_n}(\sigma)$ состоит из всех перестановок $\delta \in S_n$ с такой же цикловой структурой.*

Доказательство. Пусть разложение σ в независимые циклы имеет вид

$$\sigma = (a_1, \ldots, a_k)(b_1, \ldots, b_m) \ldots (c_1, \ldots, c_l).$$

Возьмем $\pi \in S_n$. Имеем:

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k))(\pi(b_1), \ldots, \pi(b_m)) \ldots (\pi(c_1), \ldots, \pi(c_l)). \qquad (*)$$

В самом деле $\pi\colon \{1, 2, , \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ – биекция. А значит, любой элемент $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ равен $\pi(j)$. С другой стороны $\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(j)) = \pi(\sigma(j))$. Отсюда следует приведенная выше формула $(*)$. Видно, что перестановка $\pi\sigma\pi^{-1}$ имеет ту же цикловую структуру, что и σ.

Напротив, пусть

$$\delta = (a'_1, \dots, a'_k)(b'_1, \dots, b'_m) \dots (c'_1, \dots, c'_l)$$

имеет такую же цикловую структуру, что и σ. Положим

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m \dots c_1 \dots c_l \\ a'_1 \dots a'_k b'_1 \dots b'_m \dots c'_1 \dots c'_l \end{pmatrix}.$$

Тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \delta$. □

Задача 6. Найдите все нормальные подгруппы в S_4.

Задача 7. Пусть $\sigma \in A_n$. Докажите, что $C_{S_n}(\sigma)$ либо совпадает с $C_{A_n}(\sigma)$, либо есть объединение двух равномощных классов сопряженности в A_n. А именно, $C_{S_n}(\sigma)$ совпадает с $C_{A_n}(\sigma)$, если в разложении на независимые циклы перестановки из данного класса сопряженности есть цикл четной длины или 2 цикла одинаковой нечетной длины.

Определение 39. Группа G называется p-группой, если $|G| = p^k$ для простого p и некоторого натурального k.

Теорема 19. *Центр p-группы не равен* $\{e\}$.

Доказательство. Заметим, что центр состоит из всех элементов, классы сопряженности которых состоят ровно из одного элемента. Пусть $|G| = p^k$. В пусть $g \in G$. Тогда

$$|C(g)| = \frac{|G|}{|Z(g)|} = p^m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, порядок любого смежного класса $C(g)$ либо равен 1, либо делится на p. Получаем, что $G \setminus Z(G)$ разбивается на классы сопряженности, порядок которых делится на p, а значит, $|G| - |Z(G)|$ делится на p. Отсюда $|Z(G)|$ делится на p. Следовательно, $Z(G) \neq \{e\}$. □

Лекция 12

Следствие 10. *Группа порядка p^2 абелева.*

Доказательство. Пусть $|G| = p^2$. Тогда, так как $|G|$ делится на $|Z(G)|$, есть 3 варианта: $|Z(G)| = 1$, $|Z(G)| = p^2$ и $|Z(G)| = p$. Первый случай не возможен по предыдущей теореме. Второй соответствует абелевой группе. Осталось показать, что не может быть $|Z(G)| = p$. Допустим, что $|Z(G)| = p$, тогда $|G/Z(G)| = p$. Значит, группа $G/Z(G)$ циклическая. Это противоречит предложению 7. □

Теорема 20 (Теорема Кэли)**.** *Пусть G – конечная группа порядка n. Тогда G изоморфна некоторой подгруппе в S_n.*

Доказательство. Пусть $|G| = n$. Рассмотрим α – действие G на себе левыми сдвигами. Это действие соответствует гомоморфизму $\varphi_\alpha \colon G \to S(G) \cong S_n$. (Явно этот гомоморфизм задается по правилу: элемент g переходит в биекцию $\overline{g} \mapsto g\overline{g}$ из G в G.) При этом ядро φ_α равно ядру неэффективности α. Но легко видеть, что $\mathrm{St}(e) = \{e\}$, а значит, $\operatorname{Ker}\alpha = \{e\}$. Значит, φ_α задает вложение G в S_n. □

Пусть задано действие G на X. Для $g \in G$ обозначим через X^g множество

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Лемма 28 (Лемма Бернсайда)**.** *Пусть конечная группа G действует на множестве X тогда количество орбит этого действия равно*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Доказательство. Посчитаем двумя различными способами количество пар (x, g) таких, что $g \cdot x = x$. Обозначим множество таких пар за M. Тогда с одной стороны

$$|M| = \sum_{g\in G}|X^g|.$$

С другой стороны

$$|M| = \sum_{x\in X}|\mathrm{St}(x)| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|} = |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}. \qquad (**)$$

В последней сумме заметим, что суммирование по всему X можно разбить на суммирование по непересекающимся орбитам. Пусть O – одна из орбит. Тогда

$$\sum_{x\in O}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{x\in O}\frac{1}{|O|} = 1$$

Значит, самое правое выражение в $(**)$ равно $|G|$ умножить на количество орбит. Приравнивая ко второму выражению для $|M|$ и разделив на $|G|$, получаем утверждение леммы. □

Замечание 15. Если множество X бесконечно, то обе части равенства из леммы Бернсайда будут бесконечны. В самом деле, количество орбит бесконечно так как количество элементов в каждой орбите не больше $|G|$. Выражение $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$ бесконечно, так как $X^e = X$ – бесконечное множество.

Пример 17. *Решим с помощью леммы Бернсайда такую задачу: сколько существует различных способов покрасить ребра проволочного правильного 7-угольника в 3 цвета? (Имеется в виду, что этот проволочный 7-угольник находится в трехмерном пространстве и две покраски одинаковы, если их можно совместить.)*

Рассмотрим закрепленные покраски 7-угольника, то есть занумеруем ребра и для каждого ребра будет 3 варианта покрасить его. Таких закрепленных покрасок существует 3^7. На множестве X закрепленных покрасок действует группа D_7 и нам нужно посчитать количество орбит (так как фраза "окраски одинаковы, если их можно совместить"означает, что покраски считаются одинаковыми, если лежат в одной орбите).

Чтобы применить формулу из леммы Бернсайда нужно посчитать $|X^g|$ для всех $g \in D_7$. Для $g = e$ имеем $|X^e| = 3^7$. Для любого нетривиального поворота легко видеть, что X^g состоит только из одноцветных закрепленных покрасок, а значит, $|X^g| = 3$. Для симметрии все врешины 7-угольника разбиваются на 3 пары симметричных вершин и одну, лежащую на оси симметрии. Количество покрасок из $|X^g|$ равно 3^4 так как каждую пару надо покрасить в один цвет. В итоге количество орбит равно

$$\frac{1}{14}(3^7 + 6\cdot 3 + 7\cdot 3^4) = 198.$$

Определение 40. Пусть x и y – элементы группы G. *Коммутатором* элементов x и y называется элемент

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Лемма 29. *$[x, y] = e$ тогда и только тогда, когда элементы x и y перестановочны (то есть $xy = yx$).*

Доказательство.

$$xy = yx \;\Leftrightarrow\; xyx^{-1} = y \;\Leftrightarrow\; xyx^{-1}y^{-1} = e.$$

□

Замечание 16. Обратный элемент к коммутатору является коммутатором. В самом деле:

$$[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x].$$

Определение 41. *Коммутант* группы G – это подгруппа, порожденная всеми коммутаторами пар элементов из G. Коммутант группы G обозначается G' или $[G, G]$.

Лемма 30. *Коммутант состоит из произведений коммутаторов.*

Доказательство. По определению, G' состоит из произведений коммутаторов и обратных к ним. Но, так как обратный к коммутатору – коммутатор, G' состоит из произведения коммутаторов. □

Лемма 31. *$G' = \{e\}$ тогда и только тогда, когда G коммутативна.*

Доказательство. Если G коммутативна, то все коммутаторы равны e, и значит, коммутант также равен $\{e\}$.

Если же G не абелева, то найдутся два элемента x и y такие, что $xy \neq yx$. Тогда $[x, y] \neq e \in G'$. □

Определение 42. Подгруппа $H \subset G$ называется *характеристической*, если для любого автоморфизма $\varphi\colon G \to G$ выполнено $\varphi(H) = H$.

Характеристическая подгруппа автоматически является нормальной. Для доказательства этого достаточно рассмотреть внутренний автоморфизм $\varphi_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$.

Лемма 32. *Характеристическая подгруппа характеристической подгруппы является характеристической.*

Доказательство. Пусть H – характеристическая подгруппа G, а N – характеристическая подгруппа H. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда $\varphi(H) = H$. Поскольку $\varphi^{-1}(H) = H$, получаем, что $\varphi\,|_H\colon H \to H$ – автоморфизм H. Значит, поскольку N характеристическая, $\varphi(N) = \varphi\,|_H\,(N) = N$. □

Замечание 17. Напомним, что нормальная подгруппа нормальной подгруппы не всегда нормальна.

Предложение 16. *Коммутант и центр – характеристические подгруппы.*

Доказательство. Пусть G – группа. Рассмотрим $z \in Z(G)$, и пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено

$$\varphi(z)g = \varphi(z\varphi^{-1}(g)) = \varphi(\varphi^{-1}(g)z) = g\varphi(z).$$

То есть $\varphi(z) \in Z(G)$. Пусть теперь $g \in G'$. Тогда

$$g = [x_1, y_1] \dots [x_k, y_k].$$

Получаем

$$\varphi(g) = [\varphi(x_1), \varphi(y_1)] \dots [\varphi(x_k), \varphi(y_k)] \in G'.$$

□

Следствие 11. *Коммутант G' – нормальная подгруппа в G.*

Рассмотрим ряд *кратных коммутантов*. $G \supset G' \supset G'' \supset G^{(3)} \supset G^{(4)} \supset \dots$ Имеется в виду, что $(G^{(i)})' = G^{(i+1)}$. Из предложения следует, что $G^{(i)}$ – характеристическая (и в частности нормальная) подгруппа в G.

Лемма 33. *Группа G/G' коммутативна.*

Доказательство. Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов из G/G':

$$[gG', hG'] = gG' \cdot hG' \cdot (gG')^{-1} \cdot (hG')^{-1} = [g, h]G' = G'.$$

То есть коммутатор любых элементов из G/G' равен единице группы G/G'. Значит, G/G' – абелева группа. □

Теорема 21. *а) Пусть H – подгруппа в G и $G' \subseteq H$. Тогда H – нормальная подгруппа и G/H – абелева группа.*

б) Если $G \triangleright H$ и группа G/H – абелева группа то $G' \subset H$.

Доказательство. а) Пусть $g \in G$, $h \in H$. Тогда $ghg^{-1} = [g, h]h \in H$. Значит, $G \triangleright H$.

Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов из G/H:

$$[g_1H, g_2H] = g_1H \cdot g_2H \cdot (g_1H)^{-1} \cdot (g_2H)^{-1} = [g_1, g_2]H = H.$$

Значит, $(G/H)' = \{e\}$, то есть G/H – коммутативная группа.

б) Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов из G/H:

$$[g_1H, g_2H] = g_1H \cdot g_2H \cdot (g_1H)^{-1} \cdot (g_2H)^{-1} = [g_1, g_2]H.$$

Так как G/H – абелева группа, $[g_1H, g_2H] = H$. Получаем $[g_1, g_2]H = H$, следовательно, $[g_1, g_2] \in H$. Поскольку коммутаторы порождают G', выполняется $G' \subset H$. □

Лемма 34. *а) A_n порождается тройными циклами.*

б) При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами несмежных транспозиций $(i, j)(k, s)$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma \in A_n$. Любая перестановка разлагается в произведение транспозиций. Поскольку σ – четная перестановка, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{2m}$. Рассмотрим $\tau_{2l-1}\tau_{2l}$. Возможны 3 варианта:

1) $\tau_{2l-1} = \tau_{2l}$. Тогда из произведения можно их удалить.

2) $\tau_{2l-1} = (i, j)$, $\tau_{2l} = (j, k)$. Тогда $\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i, j, k)$.

3) $\tau_{2l-1} = (i, j)$, $\tau_{2l} = (k, s)$. Тогда $\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i, j)(j, k)(j, k)(k, s) = (i, j, k)(j, k, s)$.

б) Пусть H – подгруппа A_n, $n \geq 5$ порожденная всеми парами несмежных транспозиций.

$$(i, j)(k, s) \cdot (k, s)(j, r) = (i, j)(j, r) = (i, j, r).$$

Значит, H содержит все тройные циклы. Но, как уже доказано, тройные циклы порождают A_n. Следовательно, $H = A_n$.

□

Теорема 22. $S'_n = A_n$.

Доказательство. Как известно, $A_n \triangleleft S_n$ и $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ – абелева группа. Следовательно, $S_n' \subset A_n$.

Обратное включение будет следовать из явных выкладок.

$$[(i,j),(j,k)] = (i,j)(j,k)(i,j)(j,k) = (i,k,j).$$

Значит, любой тройной цикл (i,k,j) лежит в S_n'. Далее утверждение теоремы следует из леммы 34 а). □

Теорема 23. *1)* $A_3' = \{id\}$,
2) $A_4' = V_4$,
3) $A_n' = A_n$ *при* $n \geq 5$.

Доказательство. 1) Группа A_3 изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и является абелевой.

2) $|A_4| = 12$, $|V_4| = 4$, следовательно, $|A_4/V_4| = 3$, то есть $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ – абелева группа. Значит, $A_4' \subset V_4$. С другой стороны

$$[(i,j,k),(j,k,s)] = (i,j,k)(j,k,s)(i,k,j)(j,s,k) = (i,s)(j,k).$$

Следовательно, $V_4 \subset A_4'$. Итак, $A_4' = V_4$.

3) Как следует из предыдущего пункта при $n \geq 4$ выполнено $(i,s)(j,k) \in A_n'$ $\forall i,j,k,s$.

Далее утверждение теоремы вытекает из леммы 34 б). □

Теорема 24. *Пусть F – поле такое, что $|F| \geq 4$. Тогда*
1) $\mathrm{SL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$
2) $\mathrm{GL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$

Доказательство. 1) Для удобства записи сделаем нужную выкладку при $n = 2$. Поскольку $|F| \geq 4$, найдется $a \in F$ такое, что $a \notin \{0, 1, -1\}$. Тогда существует $(a^2-1)^{-1}$, и для любого $\mu \in F$ можно рассмотреть $\lambda = (a^2-1)^{-1}\mu$. Заметим, что

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & a\lambda \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}\lambda \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a^2-1)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, при любом n выполняется $E + \mu E_{ij} \in \mathrm{SL}_n(F)'$ при всех $i \neq j$.

Группа $\mathrm{SL}_n(F)$ порождается элементами вида $E + \mu E_{ij}$. В самом деле, любую матрицу A из $\mathrm{SL}_n(F)$ можно привести элементарными преобразованиями первого типа к матрице E. При этом происходит умножение на матрицы вида $E + \mu E_{ij}$. Получаем

$$(E + \mu_k E_{i_k j_k}) \dots (E + \mu_1 E_{i_1 j_1}) A = E.$$

Значит,

$$A = (E - \mu_1 E_{i_1 j_1}) \dots (E - \mu_k E_{i_k j_k}).$$

2) $\mathrm{GL}_n(F)' \supset \mathrm{SL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$.

С другой стороны $\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^\times$ – абелева группа, а значит, $\mathrm{GL}_n(F)' \subset \mathrm{SL}_n(F)$. Получаем $\mathrm{GL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$. □