

ПРОГРАММА КУРСА АЛГЕБРЫ 2 КУРС 2 ПОТОК 2022г.

ЛЕКТОР С.А. ГАЙФУЛЛИН.

1) Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Таблица Кэли. Подгруппа. Проверка, что подмножество является группой. Ассоциативность композиции. Примеры групп.

2) Гомоморфизм групп, простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизм групп. Примеры изоморфизмов. Доказательство, что Q_8 – это группа.

3) Ядро и образ гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма.

4) Простейшие следствия из аксиом (6 штук), в том числе обобщенная ассоциативность, единственность единицы и обратного.

5) Автоморфизмы. Группа внутренних автоморфизмов. Группы автоморфизмов групп \mathbb{Z} и \mathbb{Z}_n .

6) Степень элемента группы. Порядок элемента группы. Порядок степени данного элемента. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.

7) Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее (в том числе теорема Эйлера).

8) Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Объяснение, почему определение факторгруппы корректно тогда и только тогда, когда подгруппа нормальна. Канонический гомоморфизм.

9) Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядками ядра и образа.

10) Подгруппа, порожденная подмножеством. Подгруппа, порожденная двумя подгруппами, одна из которых нормальна. Вторая теорема о гомоморфизме.

11) Третья теорема о гомоморфизме и следствие из нее.

12) Центр группы. Изоморфизм между факторгруппой по центру и группой внутренних автоморфизмов. Нециклическость факторгруппы по центру.

13) Эквивалентность слов. Свободная группа. Проблема равенства слов.

14) Универсальное свойство свободной группы. Нормальное замыкание. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: группа диэдра.

15) Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Теорема о факторизации прямого произведения.

16) Свободная абелева группа. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппы свободной абелевой группы. Описание всех базисов через заданный базис.

17) Универсальное свойство свободной абелевой группы. Теорема о согласованных базисах. Представление конечнопорожденной абелевой группы в виде суммы циклических.

18) Китайская теорема об остатках. Порядок элемента прямого произведения. Теорема о строении конечно порожденной абелевой группы (существование).

19) Подгруппа кручения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность). Единственность первой канонической формы конечно порожденной абелевой группы.

20) Экспонента группы. Критерий циклическости конечной абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

21) Действие группы на множестве. Примеры действий. Три действия на себе. Связь между действиями и гомоморфизмами в $S(X)$. Орбиты и стабилизаторы. Стабилизаторы точек из одной орбиты.

22) Связь между порядком орбиты и порядком стабилизатора. Порядок группы вращений куба. Изоморфизм группы вращений куба и S_4 . Изоморфизм группы симметрий правильного тетраэдра и S_4 .

23) Ядро неэффективности действия. Изоморфизм действий. Свободные и транзитивные действия. Классификация свободных транзитивных действий. Теорема Кэли.

24) Действие сопряжениями. Централлизаторы и классы сопряженности. Критерий нормальности подгруппы в терминах классов сопряженности. Классы сопряженности в S_n . Неединичность центра p -группы. Группы порядка p^2 .

25) Лемма Бернсайда. Пример применения.

26) Коммутатор элементов группы. Коммутант группы. Представление коммутанта как множества произведений коммутаторов. Нормальность коммутанта, фактор по коммутанту. Коммутант – наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.

27) Коммутанты S_n , A_n , $SL_n(F)$ и $GL_n(F)$ при $|F| \geq 4$.

28) Характеристические подгруппы. Транзитивность свойства характеристичности. Характеристичность коммутанта и центра. Нормальность кратных коммутантов.

29) Разрешимые группы. Критерий разрешимости. Разрешимость групп S_n и A_n при $n \leq 4$. Неразрешимость групп S_n и A_n при $n \geq 5$. Разрешимость группы невырожденных верхнетреугольных матриц.

30) Простые группы. Простота группы A_5 .

31) Простота группы $SO(3)$.

32) Первая теорема Силова

33) Вторая теорема Силова.

34) Третья теорема Силова.

35) Разрешимость групп порядка p^k , pq и p^2q .

36) Полупрямое произведение внутреннее и внешнее определение. Реализация D_n и S_n как полупрямых произведений.

37) Классификация групп порядка pq .

38) Уплотнение субнормального ряда, если факторы не простые. Теорема Жордана-Гельдера (без доказательства).

39) Линейное представление группы. Групповая алгебра. Примеры: мономиальное представление S_n , двумерное представление S_3 , регулярное представление группы.

40) Прямая сумма представлений. Инвариантное подпространство. Неприводимые и вполне приводимые представления. Достаточное условие вполне приводимости. Пример не вполне приводимого представления.

41) Одномерные представления конечных абелевых групп. Неприводимые комплексные представления абелевых групп. Пример двумерного неприводимого вещественного представления абелевой группы. Биекция между одномерными представлениями группы и фактора по коммутанту.

42) Теорема Машке. Примеры не вполне приводимых представлений а) бесконечной группы над комплексным полем, б) конечной группы над полем конечной характеристики. Разложение мономиального представления S_n в прямую сумму неприводимых.

43) Лемма Шура.

44) Билинейная форма на пространстве комплекснозначных функций из группы в поле. Матричные элементы представлений. Соотношения ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений.

45) Характер представления. Свойства характеров. Полуторалинейная функция на пространстве комплекснозначных функций на группе. Пространство центральных функций с полуторалинейной формой является эрмитовым.

46) Совпадение билинейной и полуторалинейной форм на комплексных характерах конечной группы. Соотношение ортогональности для характеров. Кратность вхождения неприводимого представления во вполне приводимое. Связь с полуторалинейным умножением характеров.

47) Неприводимые комплексные характеры образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.

48) Совпадение количества неприводимых комплексных характеров данной группы и количества классов сопряженности в данной группе. Кратность вхождения данного неприводимого представления в регулярное. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.

49) Комплексные неприводимые представления групп S_3 и S_4 .

50) Кольцо, алгебра. Делители нуля, нильпотенты и обратимые элементы. Примеры. Алгебра кватернионов. Доказательство того, что алгебра кватернионов является алгеброй с делением.

51) Левые правые и двусторонние идеалы. Идеал в кольце с единицей, порожденный подмножеством. Гомоморфизм колец. Ядро и образ гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме для колец. Примеры применения.

52) Факторкольцо кольца многочленов над полем по главному идеалу: размерность как алгебры, для каких многочленов является полем. Построение поля из 4 элементов.

53) Простое кольцо. Простота кольца квадратных матриц порядка n над полем. Критерий простоты для коммутативного кольца. При каких условиях на идеал факторкольцо является областью целостности, а при каких – полем.

54) Евклидово кольцо. Кольцо главных идеалов. Факториальное кольцо. Евклидово кольцо является кольцом главных идеалов. Факториальность кольца главных идеалов. Примеры евклидовых колец.

55) Характеристика поля. Простое подполе. Количество элементов в конечном поле – степень простого числа. Автоморфизм Фробениуса.

56) Расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы. Алгебраические и конечные расширения. Конечное расширение алгебраическое. Теорема о башне расширений. Поле, порожденное (полученное присоединением) данным подмножеством в расширении. Присоединение алгебраического элемента. Расширение, порожденное конечным числом алгебраических элементов конечно.

57) Поле разложения многочлена: существование и единственность.

58) Существование и единственность поля из p^n элементов. Подполя конечного поля.

59) Теорема Фробениуса.