Лекция 12

Теорема 1. *Пусть* $\Phi\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *– кососимметричная полилинейная функция. Тогда* $\Phi(A) = \Phi(E)\det(A)$.

Доказательство. Из линейности следует, что если в матрице B есть нулевая строка, то $\Phi(B) = 0$. Действительно, умножим эту строку на ноль, с одной стороны Φ умножится на ноль, а с другой – не изменится. Из кососимметричности следует, что если в матрице C есть две одинаковые строки, то $\Phi(C) = 0$. В самом деле, поменяем эти строки. С одной стороны определитель умножится на минус 1, а с другой – не изменится. Из линейности, если в матрице D есть две пропорциональные строки, то $\Phi(D) = 0$. Отсюда можно так же, как и для определителя, вывести, что Φ не меняется при элементарных преобразованиях строк I типа. Из кососимметричности, при элементарных преобразованиях II типа Φ умножается на -1. Из линейности, при элементарных преобразованиях строк III типа с коэффициентом c, определитель умножается на c. Таким образом, Φ и $\det$ умножаются на одинаковые числа при всех элементарных преобразованиях.

Приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду S. При этом для некоторого $\mu \neq 0$ выполнено $\Phi(A) = \mu\Phi(S)$, $\det(A) = \mu\det(S)$. Если S имеет нулевую строку, то $\det(S) = \Phi(S) = 0$, а значит, $\det(A) = \Phi(A) = 0$. И выполнено $\Phi(A) = \Phi(E)\det(A)$.

Если же в S нет нулевой строки, то $S = E$. Имеем $\det(A) = \mu\det(E) = \mu$. Тогда

$$\Phi(A) = \mu\Phi(E) = \Phi(E)\det(A).$$

□

Строки матрицы AB – это линейная комбинация строк B с коэффициентами из строк A.

То есть если $A_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $AB = C$, то $C_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_j$

Теорема 2.

$$\det AB = \det A \det B.$$

Доказательство. Фиксируем матрицу B и рассмотрим функцию $\Phi_B\colon \mathrm{Mat}_{n,n} \to \mathbb{R}$, $\Phi_B(A) = \det AB$. Тогда Φ_B – это полилинейная кососимметричная функция от строк A. Действительно, пусть

$$X = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' + A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, P = XB, Q = YB, C = AB.$$

Тогда при $j \neq i$, $P_j = Q_j = C_j$ и $C_i = P_i + Q_i$. Значит,

$$\Phi_B(A) = \det C = \det P + \det Q = \Phi_B(X) + \Phi_B(Y).$$

Второе равентсво для полилинейности и кососимметричность проверяются аналогично.

Имеем $\det AB = \Phi_B(A) = (\det A)\Phi_B(E) = \det A \det B$. □

Следствие 1.

$$\det\ A^{-1} = \frac{1}{\det\ A}.$$

Теорема 3. *Пусть* M *– квадратная матрица* $n \times n$ *имеет вид*

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & B \end{pmatrix},$$

где $A \in \mathrm{Mat}_{k,k}$, $X \in \mathrm{Mat}_{n-k,k}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n-k,n-k}$, $0 \in \mathrm{Mat}_{k,n-k}$. *Тогда* $\det M = \det A \det B$.

Доказательство. Фиксируем матрицы X и B. Тогда $\det M$ – функция $\Psi(A)$. Эта функция полилинейна и кососимметрична (даже по всем строкам M, но и по строкам A в частности). Значит, $\Psi(A) = \Psi(E)\det A$. При этом $\Psi(E) = \begin{vmatrix} E & 0 \\ X & B \end{vmatrix} = \Phi(B)$. Эта функция полилинейна и кососимметрична по столбцам B. Значит, $\Phi(B) = \Phi(E)\det(B)$. Но $\Psi(E) = 1$. Следовательно, $\det M = \Psi(A) = \Psi(E)\det A = \Phi(B)\det A = \det A\Phi(B) = \det A \det B\Phi(E) = \det A \det B$. □

Выберем k строк $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов $j_1, \ldots, j_k$ в матрице A. Удалим все остальные строки и столбцы. Останется квадратная матрица $k \times k$, находящаяся на пересечении выбранных строк и столбцов. Определитель этой матрицы мы будем называть $k \times k$-минором исходной матрицы A. (Конечно же у данной матрицы много различных $k \times k$-миноров.)

Обозначим $(n-1) \times (n-1)$-минор, стоящий на пересечении всех строк, кроме i-ой и всех столбцов, кроме j-го через M_{ij}.

Определение 1. *Алгебраическое дополнение* к элементу a_{ij} – это число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 4 (Разложение определителя по i-ой строке)**.**

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Доказательство. Разложим i-ю строку в сумму n строк:

$$(a_{i1}, \ldots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_{in}).$$

Тогда определитель есть сумма n слагаемых. Рассмотрим j-е из них V_j. Поменяем в нем i-ю строку с $i-1$-й, затем $i-1$-ю с $i-2$-й и т.д. Совершим при этом $i-1$ транспозицию строк и поставим i-ю строку на 1 место. Аналогично, совершив $j-1$ транспозицию столбцов, поставим j столбец на 1 место.

Получим матрицу

$$U_j = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где матрица B получена из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. То есть $\det B = M_{ij}$. По теореме об обпределителе с углом нулей $\det U_j = a_{ij} M_{ij}$. При этом при переходе от V_j к U_j мы поменяли знак определителя $(i-1)+(j-1)$ раз. То есть $V_j = (-1)^{(i-1)+(j-1)} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$. Получаем $\det A = \sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$. □

Аналогично доказывается (или формально выводится из предыдущей с помощью транспонирования) слудующая теорема.

Теорема 5 (Разложение определителя по j-му столбцу)**.**

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6 (Фальшивое разложение определителя по i-ой строке)**.**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \ \textit{при} \ k \neq i.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу B, полученную из A заменой k-ой строки на i-ю. В матрице B две одинаковые строки, следовательно, $\det B = 0$. Разложим определитель матрицы B по k-ой строке. Получим

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} B_{kj} = a_{ij} A_{kj}.$$

□

Аналогично получается следующая теорема.

Теорема 7 (Фальшивое разложение определителя по j-му столбцу)**.**

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \textit{ при } k \neq j.$$

Определение 2. *Присоединенная матрица* – это матрица $\widehat{A}$ являющаяся **транспонированной** матрицей из алгебраических дополнений.

$$\widehat{a}_{ij} = A_{ji}.$$

Замечание 1. Будьте внимательны, в литературе чаще присоединчнной называется не транспонированная матрица из алгебраических дополнений. Мы же назвали присоединчнной уже транспонированную матрицу. (Это вопрос терминологии и не очень важно, но не запутайтесь!)

Теорема 8.

$$A\widehat{A} = (\det A)E.$$

Доказательство. Пусть $A\widehat{A} = D$. Тогда

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{a}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det A.$$

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0.$$

□

Если $\det A \neq 0$, то разделив предыдущее равенство на $\det A$, получаем следующее утверждение.

Теорема 9 (Явная формула для обратной матрицы)**.** *Матрица* A^{-1} *существует тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$. *В этом случае*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}.$$