Лекция 13

Рассмотрим квадратную СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пусть A – матрица коэффициентов (не расширенная) этой СЛУ. Рассмотрим квадратные матрицы $A_1, \ldots, A_n$, где матрица A_i получена из A заменой i-го столбца на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема 1 (Теорема Крамера)**.** *Данная СЛУ определена тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$*. В этом случае решение находится по формуле* $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$*.*

Доказательство. Пусть A – матрица коэффициентов системы и B – столбец правых частей. Мы знаем, что система определена тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $(A|B)$ и равен количеству неизвестных. Так как матрица A квадратная, ее ранг равен количеству неизвестных тогда и только тогда, когда он равен размеру этой матрицы, то есть $\det A \neq 0$. С другой стороны, если $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rk} A = n$ и тогда

$$n = \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(A|B) \leq n.$$

Отсюда ранги A и $(A|B)$ равны и совпадают с n, то есть выполнены все условия определенности системы.

Пусть теперь $\det A \neq 0$. Тогда матрица A обратима. Изначальная СЛУ в матричном сиде имеет вид $AX = B$, где X – столбец решения. Умножая слева на A^{-1}, получаем $X = A^{-1}B$.

Рассмотрим матрицу $A^{-1}A_i$. Каждый столбец умножается на A^{-1} отдельно. Поэтому в матрице $A^{-1}A_i$ все столбцы, кроме i-го – это столбцы единичной матрицы, а i-ый – это столбец X. Получаем, что

$$\frac{\det A_i}{\det A} = \det(A_i A^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{vmatrix} = x_i.$$

□

Замечание 1. На лекции было рассказано другое доказательство.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

Имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -1,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда СЛУ определена и

$$x_1 = \frac{-1}{-1} = 1,\ x_2 = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Напомним, что $k\times k$-минор (минор порядка k) матрицы A – это определитель подматрицы, стоящей на пересечении некоторых k строк и некоторых k столбцов матрицы A. Если эти строки имели номера $i_1, \ldots, i_k$, а столбцы – $j_1, \ldots, j_k$, то будем обозначать этот минор $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$.

Теорема 2 (Теорема о ранге матрицы)**.** *Пусть* $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}$*. Ранг матрицы* A *равен максимальному порядку ненулевого минора этой матрицы.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать заявленное равенство, докажем неравенства в одну и другую сторону. Сперва докажем, что ранг не меньше, чем порядок любого ненулевого минора данной матрицы. Пусть в A есть ненулевой минор порядка k, и пусть это $M^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}$. Так как определитель этой $k\times k$-матрицы не равен нулю, ее строки ЛНЗ. Однако строки данной матрицы – это строки $A_{i_1},\dots,A_{i_k}$, в которых убраны некоторые координаты (с одинаковыми номерами). Следовательно, строки $A_{i_1},\dots,A_{i_k}$ ЛНЗ, то есть $\operatorname{rk} A \geq k$.

Пусть теперь $\operatorname{rk} A = k$. Докажем, что в A найдется ненулевой минор порядка k. Выберем базисные строки $A_{i_1},\dots,A_{i_k}$ и рассмотрим подматрицу P размера $k\times n$ в матрице A, состоящую из этих строк. Так как строки P ЛНЗ, $\operatorname{rk} P = k$. Выберем базисные столбцы матрицы P. Это столбцы с номерами $j_1,\dots,j_k$ и они ЛНЗ. Следовательно, матрица, состоящая из этих базисных столбцов имеет ранг k, а значит, определитель этой матрицы не 0. Но это в точности подматрица матрицы A, стоящая на пересечении строк $i_1,\dots,i_k$ и столбцов $j_1,\dots,j_k$. □

Пример 2. *Матрица* $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ *имеет ранг 2. Минор на пересечении строк 1 и 2 и стобцов 2 и 3. Не равен нулю. А все 4 минора* 3×3 *равны нулю.*

Замечание 2. Не верно, что на пересечении любых k ЛНЗ строк и k ЛНЗ столбцов стоит матрица с ненулевым определителем. Например, если взять ненулевую строку и ненулевой столбец, на их пересечении может стоять ноль (в единичной матрице, например).

Задача 1. Докажите, что если взять базисные строки и базисные столбцы, то матрица на их пересечении будет иметь ненулевой определитель.

Определение 1. Минор $(k+1)\times(k+1)$ называется *окаймляющим* минором для данного минора $k\times k$, если соответствующая подматрица получена добавлением 1 строки и 1 столбца к подматрице минора $k\times k$.

Теорема 3 (Теорема об окаймляющих минорах)**.** *Если данный минор $k\times k$ матрицы A не равен нулю, а все его окаймляющие миноры равны нулю, то* $\operatorname{rk} A = k$.

Доказательство. По теореме о ранге матрицы $\operatorname{rk} A \geq k$. Допустим, что $\operatorname{rk} A \geq k+1$. Пусть данный нам ненулевой минор стоит на пересечении строк $i_1,\dots,i_k$ и столбцов $j_1,\dots,j_k$. Тогда существует строка с номером $i_{k+1}\notin\{i_1,\dots,i_k\}$ такая, что система строк с номерами $i_1,\dots,i_k,i_{k+1}$ ЛНЗ. Рассмотрим матрицу P размера $(k+1)\times n$, состоящую из этих строк. Ранг этой матрицы $k+1$. Тогда столбцы $P^{(j_1)},\dots,P^{(j_k)}$ ЛНЗ так как даже если убрать строчку i_{k+1}, то они будут ЛНЗ. Дополним столбцы $P^{(j_1)},\dots,P^{(j_k)}$ до база системы столбцов P некоторым столбцом $P^{(j_{k+1})}$. Матрица, состоящая из столбцов $P^{(j_1)},\dots,P^{(j_k)},P^{(j_{k+1})}$ имеет ненулевой определитель. Но это подматрица $(k+1)\times(k+1)$ в A, что противоречит условию. □

Теорема 4 (Определитель Вандермонда)**.**

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j).$$

Доказательство. Обозначим данный определитель через $V(x_1,\dots,x_n)$ и докажем теорему по индукции по n.

База. $n=2$.

$$V(x_1,x_2) = \begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Шаг. Вычтем каждый столбец, умноженный на x_1 из следующего (сначала вычетаем $n-1$-ый из n-го, затем $n-2$-ой из $n-1$-го и т.д.)

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_n).$$

По предположению индукции

$$V(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. □

Задача интерполяции. Задача интерполяции заключается в том, чтобы найти функцию $f(x)$ (обычно не любую, а из какого-то заданного класса "хороших"функций) такую, что в n различных точках $x_1, \dots, x_n$ она принимает заданные значения $y_1, \dots, y_n$.

Теорема 5. *Для любых различных $x_1, \dots, x_n$ и любых $y_1, \dots, y_n$ существует единственный многочлен $f(x)$ степени не более $n-1$, такой что $f(x_i) = y_i$ для всех i.*

Доказательство. Будем искать этот многочлен с неопределенными коэффициентами:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Тогда условие $f(x_i) = y_i$ дает линейное уравнение на $c_0, \dots, c_{n-1}$. Получаем квадратную СЛУ с матрицей $V(x_1, \dots, x_n)$. Так как все x_i различны, определитель не ноль и система определена. □

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Многочлен, решающий задачу интерполяции, можно выписать явно.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\prod\limits_{j \ne i} x - x_j}{\prod\limits_{j \ne i} x_i - x_j} y_i \right).$$

Это действительно многочлен, так как знаменатели – константы, не равные нулю. Числители – многочлены степени $n-1$. Сумма многочленов степени $n-1$ – это многочлен степени не более $n-1$. Если мы подставим в этот многочлен x_k, то все слагаемые, кроме k-го обратятся в ноль. А k-е слагаемое становится равно y_k.

Данная формула называется интерполяционной формулой Лагранжа.