Лекция 16

Определение 1. *Алгебраическая система* – это множество X с несколькими операциями $X^n \to X$ (возможно для различных n), удовлетворяющих некоторым аксиомам.

Определение 2. Пусть есть две одинаковые алгебраические системы A и B (то есть с одинаковым количеством операций от одинакового количества аргументов).*Гомоморфизм* из A в B – это отображение множеств, переводящее операции в операции (j-ю в j-ю). То есть если $\alpha_j\colon A^{n_j} \to A$ – операция на A, $\beta_j\colon B^{n_j} \to B$ – операция на B, и $\varphi\colon A \to B$ – гомоморфизм, то

$$\varphi(\alpha_j(x_1, \ldots, x_{n_j})) = \beta_j(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n_j})).$$

Пример 1 (Примеры гомоморфизмов)**.**

1) $\varphi\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +), \varphi(k) = \overline{k}$ *– гомоморфизм групп.*

2) $\varphi\colon ((\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot), \varphi(A) = \det A$ *– гомоморфизм групп.*

3) $\varphi\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, +, \cdot), \varphi(k) = \overline{k}$ *– гомоморфизм колец.*

4) $\varphi\colon (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +, \cdot), \varphi(k) = k$ *– гомоморфизм колец.*

Определение 3. *Изоморфизм* алгебраических систем – это биективный гомоморфизм.

Изоморфные системы являются одинаковыми с точки зрения алгебры.

Если одна из изоморфных систем удовлетворяет некоторой алгебраической аксиоме, то и другая тоже.

Пример 2. $\varphi\colon (\mathbb{Z}_2, +) \to (\{1, -1\}, \cdot)$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = -1$ *– изоморфизм групп.*

Комплексные числа.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Каждое расширение мотивировано тем, что хотелось бы решать новые задачи.

- Переход от натуральных чисел к целым мотивирован тем, что хочется всегда уметь вычитать числа.
- Переход от целых чисел к рациональным мотивирован тем, что хочется всегда уметь делить на число отличное от нуля.
- Переход от рациональных чисел к вещественным мотивирован тем, что хочется всегда уметь брать предел последовательности. Также связано с невозможностью извлекать корни из положительных чисел.
- Переход от вещественных чисел к комплексным мотивирован тем, что хочется всегда уметь решать алгебраические уравнения.

Определение 4. *Комплексные числа* – это множество пар вещественных чисел $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ с операциями

- сложение $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- умножение $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Теорема 1. *Комплексные числа образуют поле.*

Для того, чтобы доказать теорему, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Алгебраическая структура комплексных чисел изоморфна алгебраической структуре* $\mathbb{M}$ *матриц вида* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}$ *с операциями сложения и умножения.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{M}, \varphi(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Очевидно, что φ – биекция. Кроме того

$$\varphi((a, b) + (c, d)) = \varphi(a + c, b + d) = \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(a, b) + \varphi(c, d);$$

$$\varphi((a, b) \cdot (c, d)) = (ac - bd, ad + bc) = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(a, b) \cdot \varphi(c, d).$$

Таким образом, φ – гомоморизм. Однако, очевидно, что φ – биекция. То есть φ – изоморфизм. □

Доказательство теоремы 1. У нас есть множество $\mathbb{C}$ с двумя операциями: сложением и умножением. Надо проверить все аксиомы.

1-4) по сложению $\mathbb{C}$ – абелева группа. Очевидно. При этом $0 = (0,0)$ и $-(a,b) = (-a,-b)$.

5-6) дистрибутивности. Следуют из $\mathbb{C} \cong \mathbb{M}$ и того, что умножение матриц дистрибутивно.

7) ассоциативность умножения. Следует из $\mathbb{C} \cong \mathbb{M}$ и того, что умножение матриц ассоциативно.

8) Существование единицы. $1 = (1,0) \leftrightarrow E$.

9) Коммутативность умножения. Следует из формулы $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

10) Любой ненулевой элемент обратим. Следует из $\mathbb{C} \cong \mathbb{M}$ и того, что

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

□

Вложение вещественных чисел. Рассмотрим множество L чисел вида $(a,0)$. И рассмотрим отображение

$$\psi\colon \mathbb{R} \to L, \qquad a \mapsto (a,0).$$

Легко видеть, что ψ – изоморфизм. Таким образом $(\mathbb{R},+,\cdot) \cong (L,+,\cdot) \subset (\mathbb{C},+,\cdot)$ – подполе. В дальнейшем не будем различать $\mathbb{R}$ и L.

Заметим, что $(a,0)\cdot(c,d) = (ac,ad)$. Получаем, что на $\mathbb{C}$ есть операции сложения и умножения на $\mathbb{R}$. С этими операциями $\mathbb{C}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$, изоморфное $\mathbb{R}^2$. Его базис – это $1 = (1,0)$ и $i = (0,1)$.

Заметим, что $i^2 = -1$. Этот элемент называется *мнимой единицей.*

Получаем $(a,b) = a+bi$ – *алгебраическая форма* комплексного числа. При этом операции имеют следующий вид.

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$
$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+(ad+bc)i+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

То есть операции над комплексными числами такие же, как над вещественными линейными многочленами от переменной i, только i^2 мы заменяем на -1.

Комплексные числа соответствуют точкам плоскости. Числу $a+bi$ сопоставляется точка (a,b). При этом на оси абсцисс лежат вещественные числа, а на оси ординат – число мнимые числа вида bi.

Определение 5. *Вещественная часть* числа $z = a+bi$ – это число $\operatorname{Re} z = a$. *Мнимая часть* числа z – это число $\operatorname{Im} z = bi$. (Иногда, допуская некоторую вольность обозначений, мы будем говорить, что $\operatorname{Im} z = b$.)

Определение 6. *Модуль* комплексного числа $z = a+bi$ – это неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (корень арифметический).

Модуль равен длине радиус-вектора из начала координат в точку (a,b). Модуль нулевого числа равен нулю, а для остальных чисел он положителен. При этом на вещественной оси модуль совпадает со стандартным модулем вещественного числа.

Определение 7. Аргумент ненулевого числа $z = a+bi \neq 0$ – это величина угла между положительным лучом оси абсцисс и радиус-вектором точки (a,b), причем этот угол откладывается против часовой стрелки. Обозначается аргумент $\arg z$.

Можно считать, что $\arg z \in [0,2\pi)$. Однако удобно считать, что аргумент принимает любые значения и задан по модулю 2π. То есть, например, про число с аргументом $\frac{7\pi}{4}$ можно сказать, что его аргумент $-\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{9\pi}{4}$.

Аргумент нулевого числа не определен.

Определение 8. Пусть $z = a+bi$. Тогда *комплексно сопряженное* к z число – это $\overline{z} = a-bi$.

Геометрически сопряжение соответствует отражению симметрично относительно оси абсцисс. При сопряжении модуль комплексного числа сохраняется, а агрумент меняет знак.

Свойства сопряжения.

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

  Доказательство. $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда
  $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

  Доказательство.
  $$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$
- $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$;

  Доказательство. $\overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} = \overline{z \cdot z^{-1}} = \overline{1} = 1$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.

  Доказательство.
  $$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Деление комплексных чисел. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$. Отсюда при $\lambda \neq 0$ имеем
$$\frac{a + bi}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda} i.$$
Для того, чтобы выполнить деление $\frac{a+bi}{c+di}$ надо и числитель и знаменатель умножить на $\overline{c + di} = c - di$. Получаем
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$
В знаменателе последней дроби стоит вещественное число.

Пример 3.
$$\frac{1 + 2i}{3 - 2i} = \frac{(1 + 2i)}{(3 - 2i)} = \frac{(1 + 2i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-1 + 8i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13} i$$

Определение 9. Пара $(r, \varphi) = (|z|, \arg z)$ задает полярные координаты точки $(a, b) \neq (0, 0)$. При этом $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Имеем:
$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$
Данная запись комплексного числа называется *тригонометрической записью комплексного числа.*

Чтобы перейти от алгебраической записи к тригонометрической нужно вынести за скобки $|z|$. Проделаем это:
$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i\right)$$
При этом $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$, А значит,
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi.$$
Чтобы перевести из тригонометрического вида в алгебраический нужно просто раскрыть скобки.

Заметим, что вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0 \in \mathbb{R}$ единственный. В самом деле, если
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = s(\cos\psi + i\sin\psi),$$
то $|z| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$. Аналогично, $|z| = s$, то есть $r = s$. Приравнивая, вещественную и мнимую части равенства, получаем $\cos\varphi = \cos\psi$, $\sin\varphi = \sin\psi$. Отсюда $\varphi = \psi$ (с точностью до $2\pi k$).

Теорема 2. *При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство. Перемножим два числа в тригонометрической форме:
$$\begin{aligned} r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) &= \\ &= rs((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \\ &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$
□

Следствие 1. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Доказательство. Пусть
$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{s(\cos\psi + i\sin\psi)} = t(\cos\xi + i\sin\xi).$$
Тогда
$$s(\cos\psi + i\sin\psi)t(\cos\xi + i\sin\xi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$
По теореме $r = st$ и $\varphi = \psi + \xi$. □

Пример 4 (Частный случай)**.** $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

Теорема 3 (Формула Муавра)**.** *Пусть* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *– тригонометрический вид комплексного числа. Тогда для* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено*
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Доказательство. Получается кратным применением предыдущей теоремы. □

Следствие 2. *Формула* $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ *верна не только для натуральных, но и для целых* n.

Доказательство. При отрицательных n нужно применить результат примера 4 и формулу Муавра. □

Определение 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Комплексное число w является n-ым корнем из z, если $w^n = z$. (Обозначается $w = \sqrt[n]{z}$.)

В вещественном случае. Число вещественных корней $\sqrt[n]{x}$ равно $\begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{если } n \text{ четно и } x > 0; \\ 0, & \text{если } n \text{ четно и } x < 0. \end{cases}$

Теорема 4. *В комплексном случае. Число комплексных корней* $\sqrt[n]{z}$ *равно* $\begin{cases} 1, & \textit{если } z = 0; \\ n, & \textit{если } z \neq 0. \end{cases}$

Доказательство. Представим z и w в тригонометрическом виде.
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), w = s(\cos\psi + i\sin\psi).$$
Тогда
$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z = w^n = s^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$
Мы доказывали, что тригонометрический вид единственный, то есть отсюда следует, что
$$\begin{cases} r = s^n; \\ \varphi + 2\pi k = n\psi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
Таким образом, $s = \sqrt[n]{r}$ – корень арифметический, $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при разных k получаются вообще говоря разные (и возможно не отличающиеся на $2\pi m$). Однако, если $k_1 - k_2 = nm$, то $\frac{\varphi+2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi+2\pi k_2}{n} + 2\pi m$. Таким образом различные (не отличающиеся на $2\pi m$) углы получатся при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Итак,
$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$
□

Геометрическое расположение корней Рассмотрим множество корней $\sqrt[n]{z}$ на плоскости. У всех них модуль равен $\sqrt[n]{r}$, то есть они лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$. Аргументы идут через $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, множество корней $\sqrt[n]{z}$ образуют вершины правильного n-угольника.