

ЛЕКЦИЯ 18

Лемма 1 (о возрастании модуля). Пусть $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ – многочлен положительной степени. Тогда $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. То есть для каждого $C \in \mathbb{R}$ существует $D \in \mathbb{R}$ такое, что при $|z| > D$ выполнено $|f(z)| > C$.

Доказательство. Заметим, что $|z| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z} \rightarrow 0$.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Тогда

$$|f(z)| = |z^n| \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right|.$$

Но при $|z| \rightarrow \infty$ выполнено $\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \rightarrow 0$. Значит, существует такое $P \in \mathbb{R}$, что при $|z| > P$ выполнено

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| < \frac{|a_n|}{2}.$$

Для модулей комплексных чисел выполнено неравенство треугольника (модуль – длина вектора):

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Отсюда

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} > \frac{|a_n|}{2}.$$

Тогда $|f(z)| > |z^n| \cdot \frac{|a_n|}{2} > D^n \frac{|a_n|}{2}$. Если D таково, что $D^n \frac{|a_n|}{2} > C$, то $|f(z)| > C$. \square

Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $a \in R$ и $f(x) \in R[x]$. Положим $y = x - a$, тогда $x = y + a$. Если подставить это в $f(x)$ и раскрыть скобки, то получится многочлен $\tilde{f}(y) = f(y + a)$. Подставим обратно $y = x - a$. Получим разложение $f(x)$ по степеням $x - a$, то есть выражение вида

$$f(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + b_0.$$

При этом $f(a) = b_0$.

Пример 1. Пусть $F = \mathbb{R}$, $a = 2$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$. Тогда

$$\tilde{f}(y) = f(y + 2) = 3(y + 2)^2 + 2(y + 2) + 4 = 3y^2 + 14y + 20.$$

То есть $f(x) = 3(x - 2)^2 + 14(x - 2) + 20$.

Лемма 2 (Лемма Даламбера). Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) \in \mathbb{C}$, $\deg f(z) > 0$ и пусть $f(z_0) \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ существует $z \in U_\varepsilon(z_0)$ такое, что $|f(z)| < |f(z_0)|$.

Доказательство. Разложим $f(z)$ по степеням $z - z_0$:

$$f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k + \dots + c_n(z - z_0)^n.$$

При этом $c_0 = f(z_0) \neq 0$. Считаем, что $c_k \neq 0$. Подберем аргумент $z - z_0$ таким образом, чтобы

$$\arg(c_k(z - z_0)^k) = \pi + \arg(c_0).$$

(Ясно, что это возможно сделать верно подобрав $\arg(z - z_0)$). Далее будем подбирать модуль числа $z - z_0$ (в пределах ε -окрестности). Для этого фиксируем некоторое \tilde{z} с подходящим аргументом $\tilde{z} - z_0$ и положим $z - z_0 = t(\tilde{z} - z_0)$, $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_k(z - z_0)^k + \dots + c_n(z - z_0)^n = \\ &= c_0 + c_k t^k (\tilde{z} - z_0)^k + \dots + c_n t^n (\tilde{z} - z_0)^n = \\ &= c_0 + c_k t^k (\tilde{z} - z_0)^k + t^{k+1} (c_{k+1} (\tilde{z} - z_0)^{k+1} + \dots + t^{n-k-1} c_n (\tilde{z} - z_0)^n). \end{aligned}$$

Оценим модуль $f(z)$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |c_0 + c_k t^k (\tilde{z} - z_0)^k| + \\ &+ t^{k+1} |c_{k+1} (\tilde{z} - z_0)^{k+1} + \dots + c_n t^{n-k-1} (\tilde{z} - z_0)^n| \leq \\ &\leq |c_0 + c_k t^k (\tilde{z} - z_0)^k| + t^{k+1} (|c_{k+1} (\tilde{z} - z_0)^{k+1}| + \dots + |c_n t^{n-k-1} (\tilde{z} - z_0)^n|) \end{aligned}$$

Пусть $|\tilde{z} - z_0| = A < 1$ и пусть $\max |c_i| = B$. Тогда $|c_0 + c_k t^k (\tilde{z} - z_0)^k| = |c_0| - |c_k| t^k A^k$ (считаем $|c_0| > |c_k| t^k A^k$) и $|c_p t^{p-k-1} (\tilde{z} - z_0)^p| \leq B$. В итоге

$$|f(z)| \leq |c_0| - |c_k| t^k A^k + t^{k+1} n B = |f(z_0)| - t^k (|c_k| A^k - t n B).$$

Можно подобрать $0 < t < \varepsilon$ так, чтобы $|c_k| A^k - t n B > 0$. \square

Теорема 1 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет комплексный корень, то есть число $w \in \mathbb{C}$ такое, что $f(w) = 0$.*

Доказательство. По лемме о возрастании модуля существует $D \in \mathbb{R}$ такое, что при $|z| > D$ выполнено $|f(z)| > |f(0)|$. Рассмотрим круг $K = \{|z| \leq 2D\}$. Это замкнутое и ограниченное множество, то есть компакт. Значит, существует точка $w \in K$ в которой достигается минимум функции $|f(z)|$. Заметим, что w не лежит на границе K , так как на границе данная функция больше, чем в точке $0 \in K$. Значит, существует $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ такой, что $U_\varepsilon(w) \subset K$. Если $f(w) = 0$, то корень найден. Допустим, что $f(w) \neq 0$. Тогда по лемме Даламбера существует $w' \in U_\varepsilon(w)$ такое, что $|f(w')| < |f(w)|$. Но $w' \in K$. Получаем противоречие с выбором w . \square

Теорема 2 (Теорема Безу). *Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $a \in R$ и $f(x) \in R[x]$. Тогда $f(a) = 0$ тогда и только тогда, когда существует представление $f(x) = (x - a)q(x)$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = (x - a)q(x)$, тогда $f(a) = 0q(a) = 0$.

Обратно, $f(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + b_0$, где $b_0 = f(a)$. Значит, если $f(a) = 0$, то $f(x) = b_n(x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \dots + b_1(x - a) = (x - a)(b_n(x - a)^{n-1} + b_{n-1}(x - a)^{n-2} + \dots + b_1)$. \square

Замечание 1. Если R – область целостности, то $\deg q(x) = \deg f(x) - 1$.

Определение 1. Будем говорить, что многочлен $f(x)$ имеет корень a кратности k , если $f(x)$ может быть представлен в виде $f(x) = (x - a)^k s(x)$ и не может быть представлен в виде $(x - a)^{k+1} r(x)$.

Следствие 1. *Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается на линейные множители с коэффициентами из \mathbb{C} .*

Доказательство. Индукция по $n = \deg f$. База $n = 1$. Линейный многочлен уже разложен на линейные множители.

Шаг. Пусть z_0 – корень $f(z)$. Тогда $f(z) = (z - z_0)q(z)$. По предположению индукции $q(z)$ раскладывается на линейные множители. Тогда и $f(z)$ тоже. \square

Следствие 2. *Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет не менее n корней с учетом кратностей.*

Замечание 2. На самом деле сумма кратностей корней любого комплексного многочлена равна n . Однако это не совсем очевидно из уже доказанного. Тут хочется использовать то, что если

$$f(x) = a(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m},$$

то кратность корня x_i равна именно k_i . (Чисто теоретически она может быть больше. Вдруг есть другое разложение, где степень вхождения $(x - x_i)$ больше?) Но мы скоро докажем, что разложение многочлена над полем на неприводимые множители единственно, и из этого будет следовать нужное равенство.

Предложение 1. *Пусть z – комплексный корень многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Тогда \bar{z} – также корень f .*

Доказательство.

$$f(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + \dots + a_0 = \overline{a_n z^n + \dots + a_0} = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0.$$

\square

Следствие 3. *Любой многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение линейных и квадратичных с отрицательным дискриминантом множителей.*

Доказательство. Индукция по степени многочлена. База $\deg f = 0$ и $\deg f = 1$ очевидна. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Если $f(x)$ имеет вещественный корень c , то $f(x) = (x - c)g(x)$, при этом $\deg g < \deg f$ и к g можно применить предположение индукции.

Пусть теперь у $f(x)$ есть комплексный корень λ . Тогда $\bar{\lambda}$ — также корень $f(x)$. Значит, $f(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})h(x)$. При этом $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - 2\operatorname{Re}\lambda x + |\lambda|^2$. При этом дискриминант равен $D = 4(\operatorname{Re}\lambda)^2 - 4|\lambda|^2 < 0$. К h можно применить предположение индукции. \square

Многочлены над полем можно делить с остатком.

Предложение 2. Пусть f и g — многочлены из $F[x]$, где F — некоторое поле. Тогда существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$ и выполнено

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

Доказательство. Докажем существование индукцией по $\deg f$. База $\deg f < \deg g$. Тогда можно положить $q = 0, r = f$.

Шаг индукции. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ и $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$. Если $n \geq m$, то рассмотрим $h(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x)$. Так как $\deg h < \deg f$, по предположению индукции $h(x) = s(x)g(x) + r(x)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Тогда

$$f(x) = h(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) = \left(s(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right) g(x) + r(x).$$

Докажем единственность. Допустим, что $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$. Тогда

$$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1.$$

Если $r_1 \neq r_2$, то $\deg(r_2 - r_1) < \deg g \leq \deg(q_1 - q_2)g$. Противоречие. \square