Лекция 22

Любая дробь $\psi = \frac{f(x)}{g(x)} \in F(x)$ задает функцию

$$\psi\colon F \setminus \{g = 0\} \to F.$$

Неприятность. Область определения ψ зависит не только от класса эквивалентности пары $(f(x), g(x))$, но и от выбора представителей. Например, в $\mathbb{R}(x)$ имеем $\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$. При этом область определения $\frac{x}{x+2}$ – это $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, а область определения $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$ – это $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Выход состоит в том, чтобы называть две рациональные функции равными, если на множестве, где оба знаменателя не равны нулю, эти функции равны.

Предложение 1. *Если две рациональные дроби формально равны, то они функционально равны. Если же поле F бесконечно, то верно и обратное.*

Доказательство. Пусть $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$. Возьмем $a \in F$ такое, что $g(a) \neq 0$ и $s(a) \neq 0$. Тогда $f(x)s(x) = g(x)h(x)$. Следовательно, $f(a)s(a) = g(a)h(a)$, а значит, $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{h(a)}{s(a)}$.

Наоборот, пусть поле F бесконечно и две функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{h(x)}{s(x)}$ совпадают везде, кроме корней g и s. Тогда их разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{s(x)} = \frac{f(x)s(x) - h(x)g(x)}{g(x)s(x)}$$

обращается в ноль везде, кроме корней g и s. То есть многочлен $f(x)s(x) - h(x)g(x)$ имеетбесконечное количество корней. Значит, этот многочлен формально равен нулю. Следовательно, $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$. $\square$

Определение 1. Дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется *несократимой*, если НОД$(f, g) = 1$.

Теорема 1. *Любая рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена в виде несократимой дроби. Причем единственным образом с точностью до умножения на ненулевую константу и числителя и знаменателя.*

Доказательство. Пусть $d =$НОД(f, g). Тогда $f = d\widetilde{f}$, $g = d\widetilde{g}$. При этом НОД$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = 1$. Следовательно, $\frac{\widetilde{f}}{\widetilde{g}} = \frac{f}{g}$ – несократимая дробь.

Если же $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$ – две несократимые дроби, то $fs = gh$. Левая часть делится на f. Значит, $f \mid gh$. Но НОД$(f, g) = 1$. Тогда $f|h$. Докажем это. Существуют $u, v \in F[x]$ такие, что $uf + vg = 1$. Домножим на h, получим $ufh + vgh = h$. При этом f делит левую часть, а значит, $f|h$.

Аналогично, fs делится на h и НОД$(h, s) = 1$. Отсюда $h|f$. То есть $f|h$ и $h|f$. Значит, $f = \lambda h$, $\lambda \in F^{\times}$. Тогда $g = \lambda s$. $\square$

Определение 2. Дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется *правильной*, если $f = 0$ или $\deg f < \deg g$.

То, что дробь является правильной не зависит от ее записи. При сложении, вычитании и умножении правильных дробей получаются правильные дроби. Таким образом, правильные дроби образуют подкольцо (без единицы).

Предложение 2. *Любую дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Причем такое представление единственно.*

Доказательство. Поделим числитель на знаменатель с остатком: $f = qg + r$. Тогда

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}.$$

Единственность такого представления следует из единственности деления с остатком. $\square$

Определение 3. Дробь называется *простейшей*, если она имеет вид $\frac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен и $\deg f < \deg p$.

Пример 1. *1) При $F = \mathbb{C}$ все простейшие дроби имеют вид $\frac{\lambda}{(x-c)^k}$.*

2) При $F = \mathbb{R}$ все простейшие дроби имеют вид либо $\frac{\lambda}{(x-c)^k}$, либо $\frac{ax+d}{(x^2+bx+c)^k}$, где $b^2 < 4c$.

Теорема 2. *Пусть* $r = \frac{f}{g} \in F(x)$ *– правильная дробь. И пусть* $g = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$. *Тогда существует единственное разложение*

$$r = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{h_{ij}}{p_i^j},$$

где $\deg h_{ij} < \deg p_i$.

Доказательство данной теоремы потребует некоторой подготовки. Докажем сначала 2 леммы.

Лемма 1. *Пусть* $g = g_1 g_2$, *где* g_1 *и* g_2 *взаимно просты. Тогда правильную дробь* $\frac{f}{g}$ *можно представить в виде суммы правильных дробей* $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$.

Доказательство. НОД$(g_1, g_2) = 1$. Тогда $u_1 g_1 + u_2 g_2 = 1$. Домножим числитель нашей дроби на 1, представленную в таком виде. Получаем

$$\frac{f}{g_1 g_2} = \frac{f u_1 g_1 + f u_2 g_2}{g_1 g_2} = \frac{f u_1}{g_2} + \frac{f u_2}{g_2}.$$

Поделим с остатком $f u_2 = q_1 g_1 + f_1$, $f u_1 = q_2 g_2 + f_2$. Тогда

$$\frac{f u_1}{g_2} + \frac{f u_2}{g_2} = q_1 + q_2 + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

Мы получили, что правильная дробь равна сумме многочлена и правильной дроби. Следовательно, $q_1 + q_2 = 0$. □

Следствие 1. *Если* $g = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, *то правильная дробь* $\frac{f}{g}$ *может быть представлена в виде суммы правильных дробей*

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{f_s}{p_s^{k_s}}$$

Доказательство. Индукция по s. База $s = 1$ очевидна. Шаг. Представим $g = p_1^{k_1} (\prod\limits_{i>1} p_i^{k_i})$. Применим лемму. Разложим дробь в сумму правильных дробей со знаменателями $p_1^{k_1}$ и $\prod\limits_{i>1} p_i^{k_i}$. Ко второй дроби можно применить предположение индукции. □

Лемма 2. *Правильную дробь* $\frac{f}{p^k}$ *можно представить в виде суммы простейших дробей* $\frac{f}{p^k} = \frac{h_1}{p} + \frac{h_2}{p^2} + \dots + \frac{h_k}{p^k}$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$, тогда дробь $\frac{f}{p}$ сама по себе простейшая.

Шаг индукции. Пусть для всех многочленов $k < n$ и для любого g такого, что $\deg g < \deg p^k$ дробь $\frac{g}{p^k}$ разлагается на простейшие. Разделим f на p с остатком: $f = qp + h_n$. Имеем

$$\frac{f}{p^n} = \frac{qp + h_n}{p^n} = \frac{q}{p^{n-1}} + \frac{h_n}{p^n}.$$

Имеем $qp = f - h_n$, значит, $\deg q \leq \max\{\deg f, \deg h_n\} - \deg p < \deg p^n - \deg p < \deg p^{n-1}$. А значит, к правильной дроби $\frac{q}{p^{n-1}}$ можно применить предположение индукции. □

Доказательство теоремы 2. Существование такого разложения следует из двух последних доказанных утверждений: следствия и леммы 2.

Доказательство единственности. Пусть $g = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ и пусть есть два различных разложения на простейшие

$$\frac{f}{g} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{h_{ij}}{p_i^j} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\widetilde{h}_{ij}}{p_i^j}.$$

Домножим это равенство на g. Получим

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} h_{ij} p_1^{k_1} \dots p_i^{k_i - j} \dots p_s^{k_s} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \widetilde{h}_{ij} p_1^{k_1} \dots p_i^{k_i - j} \dots p_s^{k_s}.$$

Перенося все в одну часть, получаем

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}(h_{ij}-\widetilde{h}_{ij})p_1^{k_1}\dots p_i^{k_i-j}\dots p_s^{k_s}=0. \qquad (1)$$

Так как не все h_{ij} равны $\widetilde{h}_{ij}$, можно выбрать такие a и b, что $h_{ab}\neq\widetilde{h}_{ab}$ и при этом $h_{ac}=\widetilde{h}_{ac}$ при $c>b$. Рассмотрим слагаемое

$$(h_{ab}-\widetilde{h}_{ab})p_1^{k_1}\dots p_a^{k_a-b}\dots p_s^{k_s}$$

в сумме (1). Так как $\deg(h_{ab}-\widetilde{h}_{ab})<\deg p_a$, это слагаемое не делится на $p_a^{k_a-b+1}$. Однако все остальные слагаемые в сумме (1) делятся на $p_a^{k_a-b+1}$. В самом деле, если $i\neq a$, то слагаемое

$$(h_{ij}-\widetilde{h}_{ij})p_1^{k_1}\dots p_i^{k_i-j}\dots p_s^{k_s}$$

делится на $p_a^{k_a}$ и $k_a\geq k_a-b+1$. Если же $i=a$ и $c<b$, то

$$(h_{ac}-\widetilde{h}_{ac})p_1^{k_1}\dots p_a^{k_a-c}\dots p_s^{k_s}$$

делится на $p_a^{k_a-c}$ и $k_a-c\geq k_a-b+1$. При $i=a$, и $c>b$ слагаемые нулевые.

Итак, в сумме (1) все слагаемые, кроме одного делятся на $p_a^{k_a-b+1}$, а одно – нет. Противоречие с тем, что сумма равна 0. □

0.1. **Факториальность колец многочленов от нескольких переменных.** Наша цель – доказать следующую теорему (мы сделаем это на следующей лекции).

Теорема 3. *Пусть A – факториальное кольцо. Тогда кольцо $A[x]$ также факториально.*

Следствие 2. *Кольцо $\mathbb{Z}[x]$ факториально.*

Следствие 3. *Кольцо $A[x_1,\dots,x_n]$ факториально.*

Доказательство. $A[x_1,\dots,x_n]=A[x_1][x_2]\dots[x_n]$. □

В частности, $F[x_1,\dots,x_n]$, где F – поле, является факториальным кольцом.

Определение 4. В факториальном кольце можно определить НОД по следующему правилу: пусть $f=\lambda p_1^{k_1}\dots,p_m^{k_m}$ и $g=\mu p_1^{l_1}\dots,p_m^{l_m}$, где λ и μ обратимы, а p_i – неприводимые. Положим по определению НОД$(f,g)=p_1^{min\{k_1,l_1\}}\dots p_m^{min\{k_m,l_m\}}$ и НОК$(f,g)=p_1^{max\{k_1,l_1\}}\dots p_m^{max\{k_m,l_m\}}$. Легко показать, что каждый общий делитель f и g является делителем их НОД, а каждое общее кратное делится на НОК.

Определение 5. Многочлен $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0\in A[x]$ называется *примитивным*, если НОД$(a_1,\dots,a_n)=1$.

Напомним, что для целостного кольца A можно определить поле частных $Quot(A)$. При этом существует вложение $A\hookrightarrow Quot(A)$, $a\mapsto\frac{a}{1}$. Тогда кольцо многочленов $A[x]$ вкладывается в кольцо многочленов $Quot(A)[x]$.