Лекция 24

Рассмотрим многочлены $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$ из $F[x]$, где F – поле. Пусть $f(x) = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, $g(x) = b_0(x - y_1)\ldots(x - y_m)$.

Теорема 1.

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

(Это определитель матрицы $(m+n)\times(m+n)$*.)*

Доказательство. Обозначим данный определитель через P. Поменяем верхние m строк и нижние n строк местами (порядок первых m строк и нижних n строк между собой не меняем). Для того, чтобы это сделать нужно mn транспозиций строк. Имеем

$$P = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Теперь поменяем первую строку с последней, вторую – с предпоследней и т.д. И сделаем то же самое со столбцами. (Это в итоге даёт центральную симметрию матрицы.) Так как со строками и столбцами происходят одинаковые преобразования, знак определителя меняется чётное число раз, то есть не меняется. Получаем

$$P = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Случай 1. Все корни $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ **различны.** Рассмотрим определитель Вандермонда

$$V(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1\le u<v\le n}(x_v - x_u)\prod_{1\le s<t\le m}(y_t - y_s)\prod_{1\le i\le n, 1\le j\le m}(y_j - x_i) \neq 0.$$

Домножим P на $V(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)$, получим

$$P\cdot V(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)=$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0\\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\ y_1 & \dots & y_m & x_1 & \dots & x_n\\ y_1^2 & \dots & y_m^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{m+n-1} & \dots & y_m^{m+n-1} & x_1^{m+n-1} & \dots & x_n^{m+n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} f(y_1) & \dots & f(y_m) & f(x_1) & \dots & f(x_n)\\ y_1f(y_1) & \dots & y_mf(y_m) & x_1f(x_1) & \dots & x_nf(x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{m-1}f(y_1) & \dots & y_m^{m-1}f(y_m) & x_1^{m-1}f(x_1) & \dots & x_n^{m-1}f(x_n)\\ g(y_1) & \dots & g(y_m) & g(x_1) & \dots & g(x_n)\\ y_1g(y_1) & \dots & y_mg(y_m) & x_1g(x_1) & \dots & x_ng(x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{n-1}g(y_1) & \dots & y_m^{n-1}g(y_m) & x_1^{n-1}g(x_1) & \dots & x_n^{n-1}g(x_n) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} f(y_1) & \dots & f(y_m) & 0 & \dots & 0\\ y_1f(y_1) & \dots & y_mf(y_m) & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{m-1}f(y_1) & \dots & y_m^{m-1}f(y_m) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & g(x_1) & \dots & g(x_n)\\ 0 & \dots & 0 & x_1g(x_1) & \dots & x_ng(x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & x_1^{n-1}g(x_1) & \dots & x_n^{n-1}g(x_n) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} f(y_1) & \dots & f(y_m)\\ y_1f(y_1) & \dots & y_mf(y_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{m-1}f(y_1) & \dots & y_m^{m-1}f(y_m) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g(x_1) & \dots & g(x_n)\\ x_1g(x_1) & \dots & x_ng(x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1}g(x_1) & \dots & x_n^{n-1}g(x_n) \end{vmatrix}=$$

$$=f(y_1)\dots f(y_m)\cdot(-1)^{mn}g(x_1)\dots g(x_n)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1\\ y_1 & \dots & y_m\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{m-1} & \dots & y_m^{m-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1\\ x_1 & \dots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Так как $b_0^n f(y_1)\dots f(y_m)=R(f,g)$ и $(-1)^{mn}a_0^m g(x_1)\dots g(x_n)=R(f,g)$, получаем

$$a_0^m b_0^n P\cdot V(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)=R(f,g)^2\cdot V(y_1,\dots,y_m)V(x_1,\dots,x_n)$$

Как мы видели выше,

$$V(y_1,\dots,y_m,x_1,\dots,x_n)=V(y_1,\dots,y_m)V(x_1,\dots,x_n)\prod_{1\le i\le n,1\le j\le m}(y_j-x_i)=$$

$$=\frac{V(y_1,\dots,y_m)V(x_1,\dots,x_n)R(f,g)}{a_0^m b_0^n}.$$

Сокращаем на $V(y_1,\dots,y_m)V(x_1,\dots,x_n)\neq 0$, получаем

$$PR(f,g)=R(f,g).$$

Так как в нашем случае $R(f,g)\neq 0$, получаем $P=R(f,g)$.

Случай 2. Среди чисел $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ могут быть одинаковые.

Если грубо описать идею, то хочется воспользоваться непрерывностью обеих частей. То есть сказать, что результант – непрерывная функция от корней f и g и P – тоже. Тогда любой набор $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ можно приблизить набором различных чисел. Тогда получится, что левая и правая часть стремятся к одному и тому же. Проблема здесь в произвольности поля: рассуждения про непрерывные функции применимо к $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, но не к общему случаю. Поэтому заменим их несколько другими рассуждениями.

Рсаамотрим некие новые переменные $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$. Они все лежат в поле

$$K = F(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m) = Quot(F[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]).$$

Рассмотрим многочлены

$$\widetilde{f} = a_0(x - X_1)\dots(x - X_n), \text{ и } \widetilde{g} = b_0(x - Y_1)\dots(x - Y_m).$$

Корни этих многочленов – различные элементы из K. Следовательно, по первому случаю получаем, что

$$R(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{P},$$

где $R(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = a_0^m b_0^n \prod_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}(x_i - y_j)$,

$$\widetilde{P} = \begin{vmatrix}
\widetilde{a}_0 & \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \dots & \widetilde{a}_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \widetilde{a}_0 & \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \dots & \widetilde{a}_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \widetilde{a}_0 & \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \dots & \widetilde{a}_n & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{a}_0 & \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \dots & \widetilde{a}_n \\
\widetilde{b}_0 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \dots & \widetilde{b}_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \widetilde{b}_0 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \dots & \widetilde{b}_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \widetilde{b}_0 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \dots & \widetilde{b}_m & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{b}_0 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \dots & \widetilde{b}_m
\end{vmatrix},$$

где $\widetilde{f}(x) = \widetilde{a}_0 x^n + \dots \widetilde{a}_n$, $\widetilde{g}(x) = \widetilde{b}_0 x^m + \dots + \widetilde{b}_m$. При этом $\widetilde{a}_0 = a_0$, $\widetilde{b}_0 = b_0$. Причём равенство $R(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{P}$ – это равенство в $F[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$. Далее подставим $X_i = x_i$ и $Y_i = y_i$. Получим $R(f, g) = P$.

□

Теорема Декарта.

Определение 1. Пусть $a_0, \dots, a_n$ – последовательность вещественных чисел. Количество перемен знака в ней – это количество пар рядом стоящих положительных и отрицательных чисел после вычеркивания всех нулей.

Пусть нам дан многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Количество перемен знака в последовательности $a_0, \dots, a_n$ обозначим через $L(f)$. Количество положительных корней с учетом кратностей обозначим через $N(f)$.

Теорема 2 (Декарт). *1) $N(f) \equiv L(f) \pmod 2$,*
2) $N(f) \le L(f)$,
3) если f не имеет комплексных (не вещественных) корней, то $N(f) = L(f)$.

Доказательство. **1.** Можем считать, что $a_n > 0$. Иначе заменим f на $-f$, при этом $L(f)$ и $N(f)$ не поменяются. Кроме того можем считать, что $a_0 \ne 0$. Иначе $f(x)$ поделим на x^k, при этом $L(f)$ и $N(f)$ не поменяются.

Так как $a_n > 0$, число перемен знака $L(f)$ четно при $a_0 > 0$ и нечетно при $a_0 < 0$. С другой стороны $f(0) = a_0$. Будем двигаться от 0 вправо. При переходе через корень нечетной степени, знак функции $f(x)$ меняется, а через корень четной степени – не меняется. Получается, что в итоге знак поменяется, если сумма кратностей положительных корней нечетна и не поменяется, если четна. Но на бесконечности должно получиться положительное значение. Значит, сумма кратностей положительных корней четна, если $a_0 > 0$ и нечетна, если $a_0 < 0$. Пункт 1 доказан.

2. Докажем, что $N(f') \geq N(f) - 1$. В самом деле, если c_i – корень f кратности k_i, то c_i – корень f кратности $k_i - 1$. Кроме того по теорема Ролля между любыми двумя корнями многочлена f есть корень f'. Суммируя, получаем нужное неравенство.

С другой стороны, $L(f') \leq L(f)$. Так как $L(f')$ – число перемен знака в последовательности $a_1, 2a_2, \ldots na_n$, что равно числу перемен знака в $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Докажем пункт 2 индукцией по $n = \deg f$. База $n = 0$. Ясно.

Шаг. $N(f) \leq N(f') + 1 \leq L(f') + 1 \leq L(f) + 1$. Но так как $N(f) \equiv L(f) \pmod 2$, равенства быть не может.

3. Рассмотрим $\widetilde{f}(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots$. Тогда $L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$. В самом деле, если все коэффициенты $a_i \neq 0$, то перемена знака в последовательности $a_0, -a_1, a_2, -a_3 \ldots$ есть на i-ом месте тогда и только тогда, когда ее нет в последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ То есть в этом случае $L(f) + L(\widetilde{f}) = n$. В общем же случае, когда среди a_j есть нули, заменим их на любые ненулевые числа. При этом количество перемен знака как в последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$, так и в последовательности $a_0, -a_1, a_2, -a_3 \ldots$ может только возрасти. При этом мы попадем в предыдущий случай. То есть в этом случае $L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$.

С другой стороны $N(f) + N(\widetilde{f}) = n$, так как 0 – не корень. Если $N(f) < L(f)$, то $N(f) + N(\widetilde{f}) < L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$. Противоречие. $\square$