

ПРОГРАММА КУРСА АЛГЕБРЫ 1 КУРС 2 ПОТОК.

2023-2024 учебный год. ЛЕКТОР С.А. ГАЙФУЛЛИН.

- 1) Системы линейных уравнений. Матрица коэффициентов и расширенная матрица коэффициентов. Элементарные преобразования. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования переводят СЛУ в эквивалентную.
- 2) Экзотические уравнения. Свободные и главные переменные. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид. Метод Гаусса решения СЛУ.
- 3) Единственность улучшенного ступенчатого вида матрицы. Понятие ранга матрицы (через ступенчатый вид) и его корректность.
- 4) Векторное пространство. Простейшие свойства из аксиом. Подпространство. Критерий того, что подмножество является подпространством.
- 5) Понятие линейной зависимости системы векторов. 3 свойства линейной зависимости.
- 6) Однородные системы с количеством неизвестных большим количества уравнений. Основная лемма о линейной зависимости.
- 7) Решения однородной системы образуют подпространство. Линейная оболочка: определение и доказательство того, что это подпространство.
- 8) Базис системы векторов: эквивалентность 4 определений. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Дополнение линейно независимой системы до базиса. Выбор базиса из полной системы.
- 9) Ранг системы векторов и размерность векторного пространства. Связь ранга системы и размерности линейной оболочки. Ранг матрицы (строчный, столбцовый, ступенчатый), их совпадение.
- 10) Свойства ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости системы.
- 11) Фундаментальная система решений и алгоритм её поиска. Размерность пространства решений однородной СЛУ. Структура решений неоднородной СЛУ.
- 12) Линейное отображение. Его матрица в фиксированных базисах. Изоморфизм. Любое конечномерное пространство изоморфно пространству строк.
- 13) Операции над линейными отображениями и над матрицами, связь между ними. Матричная запись СЛУ.
- 14) Свойства операций над матрицами. Связь с транспонированием.
- 15) Вывод обобщенной ассоциативности для ассоциативной операции.
- 16) Верхние оценки на ранг суммы и произведения матриц.
- 17) Правая/левая обратная матрицы. Критерий существования. Обратная матрица, её единственность и критерий существования.
- 18) Элементарные матрицы. Умножение на элементарные матрицы слева и справа. Матрица, обратная к произведению. Обратная к транспонированной матрице.
- 19) Алгоритм поиска обратной матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных.
- 20) Подстановки и перестановки. Их количество. Произведение подстановок, его свойства. Разложение подстановки на произведение независимых циклов.
- 21) Инверсии. Четность перестановки и подстановки. Знак подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Разложение подстановки на транспозиции. Знак произведения подстановок.
- 22) Четность цикла. Четность произвольной подстановки через декремент.
- 23) Формула определителя квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Линейность и кососимметричность определителя как функции от строк/столбцов.
- 24) Определитель матрицы с нулевой строкой/столбцом. Определитель матрицы с пропорциональными строками. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов. Определитель треугольной матрицы. Алгоритм вычисления определителя с помощью элементарных преобразований. Эквивалентные условия невырожденности матрицы. Определитель матрицы с углом нулей.
- 25) Единственность с точностью до пропорциональности линейной кососимметрической функции строк/столбцов. Определитель произведения матриц.
- 26) Миноры. Алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
- 27) Фальшивое разложение определителя по строке/столбцу. Явная формула для обратной матрицы.
- 28) Формулы Крамера.
- 29) Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.
- 30) Определитель Вандермонда. Задача интерполяции.

- 31) Понятие группы, абелевой группы. Примеры. Простейшие следствия из аксиом. Подгруппа. Критерий того, что подмножество является подгруппой. Порядок элемента, порядок подстановки. Циклическая группа и её порядок.
- 32) Левые смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.
- 33) Следствия из теоремы Лагранжа (в том числе малая теорема Ферма).
- 34) Определение кольца и поля. Примеры. Простейшие следствия из аксиом. Обратимые элементы, делители нуля, нильпотенты. Взаимное расположение множеств обратимых элементов, делителей нуля и нильпотентов. Критерий того, что кольцо \mathbb{Z}_n является полем.
- 35) Характеристика поля. Какие значения может принимать характеристика? Возведение суммы в степень, равную характеристике. Малая теорема Ферма.
- 36) Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур. Комплексные числа. Доказательство того, что комплексные числа образуют поле.
- 37) Модуль и аргумент комплексного числа. Сопряженное и его свойства. Вещественная и мнимая часть комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая записи комплексного числа, переход между ними. Деление чисел в алгебраической форме.
- 38) Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.
- 39) Целостное кольцо. Многочлены от одной переменной над целостным кольцом. Понятие степени многочлена и ее свойства. Целостность кольца многочленов над целостным кольцом. Обратимые элементы в кольце многочленов над целостным кольцом. Разложение многочлена по степеням $x - x_0$. Теорема Безу.
- 40) Предел комплексных последовательностей и функций. Непрерывные функции комплексного аргумента. Непрерывная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ достигает минимума на компакте. Лемма о возрастании модуля.
- 41) Лемма Даламбера.
- 42) Основная теорема алгебры. Комплексные корни вещественных многочленов. Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} . Разложение комплексных и вещественных многочленов на неприводимые множители (существование).
- 43) Кратные корни многочлена. Количество различных корней многочлена над полем не превышает степень многочлена. Формальное и функциональное равенство многочленов от одной переменной.
- 44) Деление многочленов от одной переменной над полем с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное выражение НОД. Доказательство того, что НОД делится на все общие делители.
- 45) Факториальное кольцо. Факториальность кольца многочленов над полем.
- 46) Формальная производная многочленов. Связь значений кратных производных в данной точке с кратностью корня. Кратность корней НОД(f, f'). Избавление от кратных корней.
- 47) Многочлены от нескольких переменных. Порядки на мономах. Лексикографический порядок и его свойства. Старший член и моном. Лемма о старшем члене.
- 48) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
- 49) Теорема Виета. Дискриминант многочлена. Доказательство того, что дискриминант – многочлен от коэффициентов.
- 50) Поле частных целостного кольца. Вложение целостного кольца в свое поле частных. Поле рациональных дробей. Формальное и функциональное равенство рациональных дробей.
- 51) Несократимые правильные и простейшие рациональные дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
- 52) Примитивные многочлены над факториальным кольцом. Любой многочлен пропорционален примитивному. Лемма Гаусса.
- 53) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Примеры.
- 54) Результант. Свойства результанта. Связь результанта многочлена и его производной с дискриминантом многочлена. Выражение результанта через определитель (формулировка).