

ПРОГРАММА КУРСА АЛГЕБРЫ 1 КУРС 2 ПОТОК.

2023-2024 учебный год. ЛЕКТОР С.А. ГАЙФУЛЛИН.

- 1) Системы линейных уравнений. Матрица коэффициентов и расширенная матрица коэффициентов. Элементарные преобразования. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования переводят СЛУ в эквивалентную.
- 2) Экзотические уравнения. Свободные и главные переменные. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид. Метод Гаусса решения СЛУ.
- 3) Единственность улучшенного ступенчатого вида матрицы. Понятие ранга матрицы (через ступенчатый вид) и его корректность.
- 4) Векторное пространство. Простейшие свойства из аксиом. Подпространство. Критерий того, что подмножество является подпространством.
- 5) Понятие линейной зависимости системы векторов. 3 свойства линейной зависимости.
- 6) Однородные системы с количеством неизвестных большим количества уравнений. Основная лемма о линейной зависимости.
- 7) Решения однородной системы образуют подпространство. Линейная оболочка: определение и доказательство того, что это подпространство.
- 8) Базис системы векторов: эквивалентность 4 определений. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Дополнение линейно независимой системы до базиса. Выбор базиса из полной системы.
- 9) Ранг системы векторов и размерность векторного пространства. Связь ранга системы и размерности линейной оболочки. Ранг матрицы (строчный, столбцовый, ступенчатый), их совпадение.
- 10) Свойства ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости системы.
- 11) Фундаментальная система решений и алгоритм её поиска. Размерность пространства решений однородной СЛУ. Структура решений неоднородной СЛУ.
- 12) Линейное отображение. Его матрица в фиксированных базисах. Образ заданного вектора. Изоморфизм. Любое конечномерное пространство изоморфно пространству строк.
- 13) Операции над линейными отображениями и над матрицами, связь между ними. Матричная запись СЛУ.
- 14) Свойства операций над матрицами. Связь с транспонированием.
- 15) Вывод обобщенной ассоциативности для ассоциативной операции.
- 16) Верхние оценки на ранг суммы и произведения матриц.
- 17) Правая/левая обратная матрицы. Критерий существования. Обратная матрица, её единственность и критерий существования.
- 18) Элементарные матрицы. Умножение на элементарные матрицы слева и справа. Матрица, обратная к произведению. Обратная к транспонированной матрице.
- 19) Алгоритм поиска обратной матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных.
- 20) Подстановки и перестановки. Их количество. Произведение подстановок, его свойства. Разложение подстановки на произведение независимых циклов.
- 21) Инверсии. Четность перестановки и подстановки. Знак подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Разложение подстановки на транспозиции. Знак произведения подстановок.
- 22) Четность цикла. Четность произвольной подстановки через декремент.
- 23) Формула определителя квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Линейность и кососимметричность определителя как функции от строк/столбцов.
- 24) Определитель матрицы с нулевой строкой/столбцом. Определитель матрицы с пропорциональными строками. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов. Определитель треугольной матрицы. Алгоритм вычисления определителя с помощью элементарных преобразований. Эквивалентные условия невырожденности матрицы. Определитель матрицы с углом нулей.
- 25) Единственность с точностью до пропорциональности линейной кососимметрической функции строк/столбцов. Определитель произведения матриц.
- 26) Миноры. Алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке/столбцу.
- 27) Фальшивое разложение определителя по строке/столбцу. Явная формула для обратной матрицы.
- 28) Формулы Крамера.
- 29) Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров.
- 30) Определитель Вандермонда. Задача интерполяции.

31) Понятие группы, абелевой группы. Примеры. Простейшие следствия из аксиом. Подгруппа. Критерий того, что подмножество является подгруппой. Порядок элемента, порядок подстановки. Циклическая группа и её порядок.

32) Левые смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.

33) Следствия из теоремы Лагранжа (в том числе малая теорема Ферма).

34) Определение кольца и поля. Примеры. Простейшие следствия из аксиом. Обратимые элементы, делители нуля, нильпотенты. Взаимное расположение множеств обратимых элементов, делителей нуля и нильпотентов. Критерий того, что кольцо \mathbb{Z}_n является полем.

35) Характеристика поля. Какие значения может принимать характеристика? Возведение суммы в степень, равную характеристике. Малая теорема Ферма.

36) Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур. Комплексные числа. Доказательство того, что комплексные числа образуют поле.

37) Модуль и аргумент комплексного числа. Сопряженное и его свойства. Вещественная и мнимая часть комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая записи комплексного числа, переход между ними. Деление чисел в алгебраической форме.

38) Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

39) Целостное кольцо. Многочлены от одной переменной над целостным кольцом. Понятие степени многочлена и ее свойства. Целостность кольца многочленов над целостным кольцом. Обратимые элементы в кольце многочленов над целостным кольцом. Разложение многочлена по степеням $x - x_0$. Теорема Безу.

40) Предел комплексных последовательностей и функций. Непрерывные функции комплексного аргумента. Непрерывная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ достигает минимума на компакте. Лемма о возрастании модуля.

41) Лемма Даламбера.

42) Основная теорема алгебры. Комплексные корни вещественных многочленов. Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} . Разложение комплексных и вещественных многочленов на неприводимые множители (существование).

43) Кратные корни многочлена. Сумма кратностей не превышает степень многочлена. Формальное и функциональное равенство многочленов от одной переменной.

44) Деление многочленов от одной переменной над полем с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Линейное выражение НОД. Доказательство того, что НОД делится на все общие делители.

45) Факториальное кольцо. Факториальность кольца многочленов над полем.

46) Формальная производная многочленов. Связь значений кратных производных в данной точке с кратностью корня. Кратность корней НОД(f, f'). Избавление от кратных корней.

47) Многочлены от нескольких переменных. Порядки на мономах. Лексикографический порядок и его свойства. Старший член и моном. Лемма о старшем члене.

48) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.

49) Теорема Виета. Дискриминант многочлена. Доказательство того, что дискриминант – многочлен от коэффициентов.

50) Поле частных целостного кольца. Вложение целостного кольца в свое поле частных. Поле рациональных дробей. Формальное и функциональное равенство рациональных дробей.

51) Несократимые правильные и простейшие рациональные дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.

52) Примитивные многочлены над факториальным кольцом. Любой многочлен пропорционален примитивному. Лемма Гаусса.

53) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Примеры.

54) Результант. Свойства результанта. Связь результанта многочлена и его производной с дискриминантом многочлена. Выражение результанта через определитель (формулировка).

55)* Выражение результанта через определитель.

56)* Теорема Декарта.

Последние 2 билета (55 и 56) не были рассказаны на лекциях, но входят в конспект (и будут рассказаны на консультации 19 декабря в 19:00). Они являются обязательными только для тех, кто хочет сдавать досрочный экзамен.