

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ГОМОМОРФИЗМ. ИЗОМОРФИЗМ. ПОДГРУППЫ.

Говорят, что на множестве G задана *бинарная операция*, если задано отображение $\mu: G \times G \rightarrow G$. (Аналогично определяется n -арная операция). Часто используют обозначения $xy = x * y = \mu(x, y)$.

Определение 1. Множество G с бинарной операцией называется *группоидом*.

- Группоид, операция которого ассоциативна, то есть для любых $a, b, c \in G$ выполнено $(ab)c = a(bc)$, называется *полугруппой*.
- Если в полугруппе есть нейтральный элемент e , то есть такой элемент, что для любого $g \in G$ выполнено $eg = ge = g$, то данная полугруппа называется *моноидом*.
- Если в моноиде для каждого элемента g есть *обратный*, то есть такой элемент g^{-1} , что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, то данный моноид называется группой.
- Группа, в которой выполняется *коммутативность*, то есть для любых $a, b \in G$ верно $ab = ba$, называется *абелевой* или, что то же самое, *коммутативной группой*.

Задача 1. Привести примеры полугруппы, которая не является моноидом, и моноида, который не является группой. Можно ли сделать эти примеры конечными?

Задача 2. Пусть M – множество всех подмножеств множества X . (в том числе X и \emptyset) Какую структуру образует M с операцией

- а) пересечения,
- б) объединения,
- в) симметрической разности.

Задача 3. Образуют ли невырожденные симметрические матрицы $n \times n$ группу относительно операции умножения матриц?

Задача 4. Образуют ли ортогональные матрицы $n \times n$ группу относительно операции умножения матриц?

Задача 5. Пусть G – множество с ассоциативной бинарной операцией. При этом выполняется

- а)
 - Существует такой элемент e , что для любого $g \in G$ выполнено $eg = g$.
 - Для каждого $g \in G$ найдется элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = e$.
- б)
 - Существует такой элемент e , что для любого $g \in G$ выполнено $eg = g$.
 - Для каждого $g \in G$ найдется элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Верно ли, что G обязательно является группой?

Определение 2. *Порядком* элемента g группы (моноида) называется минимальное натуральное k такое, что $g^k = e$ – нейтральный элемент.

Задача 6. Найти порядок перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 10 & 8 & 1 & 6 & 7 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Пусть G – абелева группа. Обозначим через $G[m]$ множество элементов $g \in G$ таких, что $g^m = e$. Докажите, что $G[m]$ – подгруппа. Верно ли это для неабелевой G ?

Задача 8. В группе G квадрат каждого элемента равен единице. Докажите, что G коммутативна.

Задача 9. а) Пусть порядок элемента g равен m . Чему равен порядок элемента g^s ?

- б) Сколько элементов порядка k в циклической группе порядка n ?
- в) Сколько подгрупп порядка k в циклической группе порядка n ?

Определение 3. Гомоморфизм из группы $(G, *)$ в группу (H, \circ) – это такое отображение $\varphi: G \rightarrow H$, что $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Задача 10. Сколько различных гомоморфизмов

- а) из \mathbb{Z}_3 в \mathbb{Z}_4 ?
- б) из \mathbb{Z}_{15} в \mathbb{Z}_{12} ?

Определение 4. Изоморфизм групп – это биективный гомоморфизм.

Задача 11. Изоморфны ли группы

- а) \mathbb{Z}_3 и \mathbb{Z}_4 ?
- б) \mathbb{Z}_6 и S_3 ?
- в) $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$?

Задача 12. Какие из следующих групп изоморфны между собой, а какие – нет?
 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, \mathbb{Q}^\times , \mathbb{R}^\times , \mathbb{C}^\times

Определение 5. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой*, если H является группой относительно той же операции.

Задача 13. а) Непустое подмножество $H \subset G$ является подгруппой тогда и только тогда, когда выполнены следующие 2 условия

- если h и h' лежат в H , то $hh' \in H$.
- если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$.

б) Если подмножество H конечно, то достаточно выполнения только первого условия.

Задача 14. Докажите, что

- а) множество всех движений \mathbb{R}^n является группой.
- а) множество всех движений \mathbb{R}^n , сохраняющих данную фигуру $F \subset \mathbb{R}^n$, является группой. Такая группа называется *группой симметрий* F и обозначается $\text{Sym}(F)$.

Задача 15. Сколько элементов в группе симметрий

- а) правильного n -угольника (такая группа обозначается D_n и называется группой диэдра)
- б) правильного тетраэдра
- в) куба
- г) правильного икосаэдра

Задача 16. Придумайте фигуру F такую, что $\text{Sym}(F)$

- а) состоит из 3 элементов.
- б) состоит из 4 элементов, но не изоморфна \mathbb{Z}_4 .

Задача 17. Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4 .

Вращением фигуры $F \subset \mathbb{R}^n$ назовем движение, сохраняющее F , определитель линейной части которого равен 1.

Задача 18. Докажите, что вращения данной фигуры образуют группу.

Задача 19. * Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4 .

Задача 20. * Существуют ли две неизоморфные конечные группы, у которых для каждого $k \in \mathbb{N}$ одинаковое количество элементов порядка k ?

Задача 21. * Изоморфны ли группы $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ и $\text{GL}_3(\mathbb{C})$?