

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННОСТИ.

Определение 1. Класс сопряженности элемента $g \in G$ – это множество $C(g) = \{hgh^{-1} | h \in G\}$.

Задача 1. Опишите классы сопряженности в

- а) S_n
- б) Q_8
- в) D_n

Задача 2. Пусть $H \subset G$ – подгруппа индекса 2, и $C \subset H$ – класс G -сопряженности. Докажите, что C – либо один класс H -сопряженности, либо объединение двух классов H -сопряженности одинаковой мощности.

Задача 3. Опишите классы сопряженности в

- а) A_4 ,
- б) A_n .

Задача 4. Найдите все нормальные подгруппы в а) S_4 , б) Q_8 , в) D_5 , г) D_6
д) A_4

Определение 2. Центризатор элемента g – это $Z(g) = \{h \in G | gh = hg\}$.

Задача 5. а) Докажите, что $Z(g)$ – подгруппа.

- б) Докажите, что $|C(g)| \cdot |Z(g)| = |G|$.

Задача 6. Докажите, что центр группы из p^n элементов, где p – простое число, содержит более одного элемента.

Задача 7. Докажите, что группа порядка p^2 коммутативна.

Задача 8. Докажите, что группа автоморфизмов некоммутативной группы G не может быть циклической.

Задача 9. Пусть G – группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали с элементами из \mathbb{Z}_p

- а) Докажите, что G – некоммутативная группа порядка p^3 ,
- б) Найдите центр G ,
- в) Опишите классы сопряженности в G .

Задача 10. * Докажите, что фактор-группа группы $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ по центру изоморфна S_4 .

Задача 11. * Найдите число классов сопряженности и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка p^3 .