

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННОСТИ.

**Определение 1.** Класс сопряженности элемента  $g \in G$  – это множество  $C(g) = \{hgh^{-1} | h \in G\}$ .

**Задача 1.** Опишите классы сопряженности в

- а)  $S_n$
- б)  $Q_8$
- в)  $D_n$

**Задача 2.** Пусть  $H \subset G$  – подгруппа индекса 2, и  $C \subset H$  – класс  $G$ -сопряженности. Докажите, что  $C$  – либо один класс  $H$ -сопряженности, либо объединение двух классов  $H$ -сопряженности одинаковой мощности.

**Задача 3.** Опишите классы сопряженности в

- а)  $A_4$ ,
- б)  $A_n$ .

**Задача 4.** Найдите все нормальные подгруппы в а)  $S_4$ , б)  $Q_8$ , в)  $D_5$ , г)  $D_6$   
д)  $A_4$

**Определение 2.** Центризатор элемента  $g$  – это  $Z(g) = \{h \in G | gh = hg\}$ .

**Задача 5.** а) Докажите, что  $Z(g)$  – подгруппа.

- б) Докажите, что  $|C(g)| \cdot |Z(g)| = |G|$ .

**Задача 6.** Докажите, что центр группы из  $p^n$  элементов, где  $p$  – простое число, содержит более одного элемента.

**Задача 7.** Докажите, что группа порядка  $p^2$  коммутативна.

**Задача 8.** Докажите, что группа автоморфизмов некоммутативной группы  $G$  не может быть циклической.

**Задача 9.** Пусть  $G$  – группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали с элементами из  $\mathbb{Z}_p$

- а) Докажите, что  $G$  – некоммутативная группа порядка  $p^3$ ,
- б) Найдите центр  $G$ ,
- в) Опишите классы сопряженности в  $G$ .

**Задача 10.** \* Докажите, что фактор-группа группы  $GL_2(\mathbb{Z}_3)$  по центру изоморфна  $S_4$ .

**Задача 11.** \* Найдите число классов сопряженности и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка  $p^3$ .