Задача 1. Докажите, что
а) S_n порождается транспозициями $(i, i+1)$,
б) S_n порождается транспозициями $(1,2)$ и $(1,2,\ldots,n)$,
в) A_n порождается тройными циклами,
г) A_n порождается элементами $(a,b)(c,d)$ при $n \geq 5$.

Задача 2. Задайте образующими и соотношениями группу а) V_4, б) Q_8, в) S_4, г) A_4, д)* S_n

---

Листок 5. Абелевы группы.

Задача 3. Разлагаются ли в прямое произведение следующие группы:
а) $\mathbb{Z}$
б) S_3
в) A_4
г) S_4
д) Q_8
е) D_n

Задача 4. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ – подгруппы абелевы группы, имеющие взаимно простые порядки. Докажите, что сумма подгрупп A_i является прямой.

Задача 5. Найдите $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Задача 6. а) Докажите, что подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.
б) Верно ли это утверждение для абелевых моноидов?
в) Верно ли это утверждение для неабелевых групп?

Задача 7. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

Задача 8. Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_{3600}$ и $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

Задача 9. а) Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 200. б) Сколько с точностью до изоморфизма абелевых групп порядка n? (Не совсем хороший ответ. То есть не в элементарных функциях.)

Задача 10. Сколько элементов порядка
а) 2, 4 и 6 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?
б) 2, 4 и 5 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?

Задача 11. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная
а) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$?
б) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$?

Задача 12. Сколько подгрупп порядка 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

Задача 13. Пусть A – конечная абелева группа, порядок которой делится на натуральное число m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m.

Задача 14. Найти разложение на примарные циклические группы

$$\left(\langle a \rangle_9 \oplus \langle b \rangle_{27}\right) / \langle 3a + 9b \rangle$$

Задача 15. Изоморфны ли группы

$$(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)\,/\langle 2b\rangle \qquad \text{и} \qquad (\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)\,/\langle a+2b\rangle?$$

Задача 16. Пусть A – свободная абелева группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$. И пусть B – ее подгруппа, порожденная y_1, y_2 и y_3. Найдите, чему изоморфна фактор-группа G/H, если

а)

$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3; \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Задача 17. а) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порожденной элементами $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

б) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порожденной элементами $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$, найти порядок элемента $(32x_1 + 31x_2) + B$.