Лекция 1

Напомним следующие определения.

Определение 1. Группа – это множество G с бинарной операцией (обозначаем ее умножением), удовлетворяющей трем аксиомам

(1) $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in G$;
(2) существует $e \in G$ (нейтральный элемент/единица) такой что для любого $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$;
(3) для каждого $g \in G$ найдется (обратный элемент) g^{-1} такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Определение 2. Группа G называется абелевой (коммутативной), если для всех g_1 и g_2 из G выполнено $g_1g_2 = g_2g_1$.

Напомним различные обозначения для операции группы.

общие обозначения	мультипликативные обозначения	аддитивные обозначения
произвольная группа	произвольная группа	абелева группа
операция $*$	умножение $\cdot$	сложение $+$
нейтральный элемент e	единица e	ноль 0
обратный элемент g^{-1}	обратный элемент g^{-1}	противоположный элемент $-g$

Определение 3. Порядок группы G – это количество элементов в этой группе. (То есть мощьность множества G.) Порядок группы G обозначается $|G|$.

В первом семестре мы доказывали следствия акиом группы. (Докажите сами, если не помните!)

- (Обобщенная ассоциативность) Пусть $(G, *)$ – группа. И пусть $g_1, \ldots, g_k \in G$. Тогда как бы ни были расставлены скобки в выражении $g_1 * g_2 * \ldots * g_k$ результат будет одинаковым.
- В группе есть единственная единица.
- В группе для каждого элемента есть единственный обратный.
- Пусть $(G, *)$ – группа. Пусть $a, b \in G$. Тогда если $a*b = e$, то $b = a^{-1}$. Аналогично если $b * a = e$, то $b = a^{-1}$. (То есть проверять, что элемент обратный можно только с одной стороны)
- Пусть $(G, *)$ – группа, $a, b \in G$. Тогда $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
- Пусть $(G, *)$ – группа, $g \in G$. Тогда $(g^{-1})^{-1} = g$.

Конечную группу можно задавать с помощью таблицы Кэли (таблицы умножения). Таблица умножения – это квадратная таблица, строки и столбцы которой соответствуют элементам группы. А на пересечении строки и столбца стоит произведение элемента, соответствующего строке, и элемента, соответствующего столбцу.

Пример 1. *Построим таблицу сложения для группы* $(\mathbb{Z}_3, +) = \{0, 1\}$

$+$	*0*	*1*	*2*
0	*0*	*1*	*2*
1	*1*	*2*	*0*
2	*2*	*0*	*1*

Ясно, что таблица Кэли симметрична (относительно главной диагонали) тогда и только тогда, когда группа коммутативна.

Определение 4. Подмножество H группы $(G, *)$ называется *подгруппой*, если $(H, *)$ является группой.

Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно операции* $*$, если для любых $a, b \in S$ выполнено $a*b \in S$. Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно взятия обратного*, если для любого $s \in S$ элемент s^{-1} также принадлежит S.

Предложение 1. *Непустое подмножество H группы $(G, *)$ является подгруппой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции и замкнуто относительно взятия обратного.*

Доказательство. Если $(H, *)$ – группа, то операция $*$ корректно определена на H. Значит, H замкнуто относительно операции $*$. Пусть e – нейтральный элемент группы G, а s – нейтральный элемент группы H. Получаем $s*s = s$. В группе G есть обратный к s элемент s^{-1}. Умножая на него слева предыдущее равенство, получаем $s = e$. То есть единицы у групп G и H совпадают. Для каждго $g \in H$ есть обратный элемент g^{-1} в группе G и есть обратный элемент обратный элемент $g^{\vee}$ в группе H. Тогда $g * g^{-1} = e = g * g^{\vee}$. Умножив слева на g^{-1}, получаем $g^{-1} = g^{\vee}$. Таким образом, H замкнуто относительно взятия обратного.

Пусть теперь подмножество H замкнуто относительно операции и взятия обратного. Поскольку ассоциативность выполнена в G, то она выполнена и в H. Подмножество H не пусто. Возьмем элемент $h \in H$. Так как H замкнуто относительно взятия обратного, $h^{-1} \in H$. Пользуясь замкнутостью H относительно операции, получаем $h * h^{-1} = e \in H$. Таким образом, в H лежит единица группы G, которая является нейтральным элементом H. Поскольку H замкнуто относительно взятия обратного, в H для любого элемента найдчтся обратный. Итак, H – группа. □

Примеры групп.

1а) Числовые аддитивные группы:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +).$$

Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $-x$. Выполнение аксиом следуют из свойств сложения чисел. Все данные группы бесконечны и коммутативны.

1б) Числовые мультипликативные группы:

$$\mathbb{Q}^{\times} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{R}^{\times} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{C}^{\times} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Нейтральный элемент 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$. Выполнение аксиом следуют из свойств умножения чисел. Данные группы бесконечны и коммутативны.

Обобщение примера 1б) Пусть R – кольцо с единицей. Обозначим множество обратимых элементов через $R^{\times}$. Рассмотрим группу обратимых элементов $(R^{\times}, \cdot)$. Нейтральный элемент – единица кольца. Обратные элементы существуют так как $R^{\times}$ состоит из обратимых элементов. Если R – коммутативное кольцо, то $R^{\times}$ – коммутативная группа.

Задача 1. Приведите пример некоммутативного кольца R такого, что $R^{\times}$ – коммутативная группа порядка больше 1.

2) Группы перестановок.

а) Множество S_n всех перестановок n элементов с операцией композиции $\circ$ является группой. Докажем это. Нейтральный элемент этой группы – это тождественная перестановка, обратный элемент – обратная перестановка. Ассоциативность следует из следующей важной леммы.

Лемма 1. *Пусть есть четыре множества: X, Y, Z и W. И пусть фиксированы отображения между этими множествами $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ и $\zeta\colon Z \to W$. Тогда $(\zeta \circ \psi) \circ \varphi = \zeta \circ (\psi \circ \varphi)$.*

Доказательство. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда

$$(\zeta \circ \psi) \circ \varphi(x) = (\zeta \circ \psi)(\varphi(x)) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

С другой стороны

$$\zeta \circ (\psi \circ \varphi)(x) = \zeta(\psi \circ \varphi)(x) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

□

Применяя данную лемму к случаю $X = Y = Z = W = \{1, 2, \ldots, n\}$ получаем ассоциативность S_n. Порядок группы S_n равен $n!$. При $n > 3$ группа S_n не коммутативна.

б) Множество A_n четных перестановок из S_n с операцией композиции образует *группу четных перестановок*. Докажем, что A_n – подгруппа S_n. Это следует из того, что произведение четных перестановок – четная перестановка и обратная к четной перестановке четная. Группа A_n не коммутативна при $n \geq 4$.

в) Группа Клейна V_4. Рассмотрим множество перестановок (в виде произведения независимых циклов) $\{\mathrm{id},\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$. Несложно проверить, что это множество замкнуто относительно композиции и что каждая перестановка из этого множества обратна самой себе. Получаем, что данные перестановки образуют подгруппу в S_4, которая обозначается V_4. Эта группа коммутативна.

г) (Обобщение примера 6а) Пусть X – некоторое множество (возможно бесконечное). Рассмотрим множество $\mathrm{S}(X)$ биекций $X \to X$ с операцией композиции. Если $|X| < \infty$, то получаем группу перестановок. В общем случае получаем *группу симметий множества X*. Нейтральный элемент – тождественное преобразование. Обратный – обратное преобразование. Ассоциативность следует из леммы 1.

3) Матричные группы. Пусть $\mathbb{K}$ – поле.

а) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – множество невырожденных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно умножения матриц. Умножение матриц ассоциативно, единичная матрица – нейтральный элемент и все невырожденные матрицы обратимы (обратная также невырождена). Следовательно, $(\mathrm{GL}(\mathbb{K}), \cdot)$ – группа.

б) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ – множество $n \times n$ матриц с определителем 1 с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество в $\mathrm{GL}(\mathbb{K}$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Следовательно, это подгруппа.

в) $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ – множество ортогональных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество в $\mathrm{GL}(\mathbb{K}$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Следовательно, это подгруппа.

Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле $\mathbb{K}$ конечно.

4) Группы преобразований векторного пространства. (Подгруппы в группе $S(V)$, где V – векторное пространство.)

а) Группа обратимых линейных преобразований V.

б) Группа ортогональных линейных преобразований V.

в) Группа обратимых аффинных преобразований V.

г) Группа движений V.

Во всех этих группах нейтральный элемент – тождественное преобразование, а обратный элемент – обратное преобразование. Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле, над которым V – векторное пространство конечно и размерность V конечна.

д) Группа диэдра D_n. Рассмотрим правильный n-угольник. Группа диэдра D_n – это группа всех движений плоскости, сохраняющих этот n-угольник.

Упражнение 1. а) Докажите, что в группе D_n ровно $2n$ элементов. Среди них n поворотов и n осевых симметрий. Все оси симметрий проходят через центр n- угольника. Если n четно, то половина симметрий проходит через 2 вершины, а половина – через две серидины противоположных сторон. Если же n нечетно, то все симметрии проходят через одну вершину и середину противоположной стороны.

б) Найдите, как устроена операция в группе D_n, то есть чему равна композиция двух поворотов, двух симметрий и поворота с симметрией.

5) Группа вычетов (остатков) по модулю n: $(\mathbb{Z}_n, +)$. Сложение происходит по модулю n. Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $n - x$. Выполнение аксиом следуют из свойств остатков. Данная группа коммутативна и имеет порядок n.

6) Группа комплексных корней из единицы n-ой степени. Пусть $\mathcal{C}_n$ – множество всех комплексных корней степени n из 1. Тогда $(\mathcal{C}_n, \cdot)$ – абелева группа порядка n. Докажем это. Для того, чтобы доказать, что $\mathcal{C}_n$ – группа мы воспользуемся, тем, что это подмножество в известной нам группе $\mathbb{C}^\times$. Нам надо лишь проверить, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Пусть $a, b \in \mathcal{C}_n$, то есть $a^n = b^n = 1$. Тогда $(ab)^n = a^n b^n = 1$, значит, $ab \in \mathcal{C}_n$. Мы доказали, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения. С другой стороны $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, следовательно, $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно взятия обратного. То, что группа $\mathcal{C}_n$ абелева следует из того, что она является подгруппой в абелевой группе $\mathbb{C}^\times$.

Единица этой группы – это 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$.

7) Группа кватернионов Q_8. Рассмотрим множество из 8 элементов:

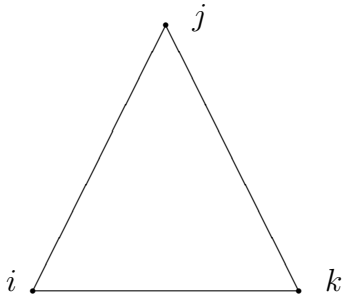
$$\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Умножение устроено следующим образом: знаки умножаются отдельно,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ ji = -k,\ ik = -j,\ ki = j,\ jk = i,\ kj = -i.$$

Для того, чтобы запомнить правило умножения элементов i, j и k удобно изобразить их в вершинах треугольника.



Теперь, если мы хотим умножить два элемента, то, если направление движение от первого ко второму по часовой стрелке, получаем третий элемент, а если против часовой стрелки, то минус третий.

Легко видеть, что 1 – нейтральный элемент, и каждый элемент обратим. В самом деле, элементы 1 и -1 являются обратными к самим себе. А для любого другого элемента x выполнено $x^{-1} = -x$. Для того, чтобы утверждать, что Q_8 – группа, необходимо проверить ассоциативность. Докажем это на следующей лекции.