Лекция 11

Определение 1. Пусть G – группа, а X – множество. *Действием* группы G на множестве X называется отображение $\alpha\colon G\times X\to X$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых $g,h\in G$ и $x\in X$ выполнено $\alpha(g,\alpha(h,x))=\alpha(gh,x)$,
2) для любого $x\in X$ выполнено $\alpha(e,x)=x$.

Если задано действие группы G на множестве X, то говорят, что G *действует* на X и обозначают $G\curvearrowright X$ (в некоторой литературе обозначают $G:X$). При этом $\alpha(g,x)$ называется действием (или применением) элемента g к элементу x, и $\alpha(g,x)$ обозначается $g\cdot x$. В таких обозначениях свойства действия из определения 1 принимают вид:

1) для любых $g,h\in G$ и $x\in X$ выполнено $g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x$,
2) для любого $x\in X$ выполнено $e\cdot x=x$.

Пример 1. *Пусть $X=\{1,2,\dots,n\}$. Тогда есть естественное действие симметрической группы S_n на X, заданное по формуле $\sigma\cdot i=\sigma(i)$.*
То, что это действие сводится к проверкам
1) $\sigma\cdot(\delta\cdot i)=\sigma(\delta(i))=(\sigma\circ\delta)(i)=(\sigma\circ\delta)\cdot i$,
2) $\mathrm{id}\cdot i=\mathrm{id}(i)=i$.

Пример 2. *Пусть K – поле. Тогда зададим действие $\mathrm{GL}(K)\curvearrowright K^n$ по следующей формуле. Для $A\in\mathrm{GL}(K)$ и $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in K^n$ положим $A\cdot Y=AY$. Доказательство того, что это действие сводится к проверкам*
1) $A\cdot(B\cdot Y)=ABY=(AB)\cdot Y$,
2) $E\cdot Y=EY=Y$.
Такое действие называется тавтологическим.

Важный частный случай действий – это действия группы на себе, то есть случай, когда $X=G$. Есть три естественных действия $G\curvearrowright G$.

Пример 3. *1)* **Действие G на себе левыми сдвигами.**
По определению $g\cdot\overline{g}=g\overline{g}$.
Тогда $g_1\cdot(g_2\cdot\overline{g})=g_1g_2\overline{g}=(g_1g_2)\cdot\overline{g}$ и $e\cdot\overline{g}=e\overline{g}=\overline{g}$.
2) **Действие G на себе правыми сдвигами.**
По определению $g\cdot\overline{g}=\overline{g}g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1\cdot(g_2\cdot\overline{g})=g_1\cdot(\overline{g}g_2^{-1})=(\overline{g}g_2^{-1})g_1^{-1}=\overline{g}(g_1g_2)^{-1}=(g_1g_2)\cdot\overline{g},$$
$$e\cdot\overline{g}=\overline{g}\cdot e=\overline{g}.$$

3) **Действие G на себе сопряжениями.**
По определению $g\cdot\overline{g}=g\overline{g}g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1\cdot(g_2\cdot\overline{g})=g_1\cdot(g_2\overline{g}g_2^{-1})=g_1g_2\overline{g}g_2^{-1}g_1^{-1}=(g_1g_2)\overline{g}(g_1g_2)^{-1}=(g_1g_2)\cdot\overline{g}.$$
$$e\cdot\overline{g}=e\overline{g}e^{-1}=\overline{g}.$$

Замечание 1. Заметим, что нельзя определить правое действие (действие правыми сдвигами) таким образом $g \cdot \overline{g} = \overline{g}g$, так как при этом

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \overline{g}) = g_1 \cdot (\overline{g}g_2) = \overline{g}g_2g_1, \qquad (g_1g_2) \cdot \overline{g} = \overline{g}g_1g_2.$$

Если группа G не коммутативная, то найдутся два элемента g_1 и g_2 такие, что

$$\overline{g}g_2g_1 \neq \overline{g}g_1g_2.$$

Заметим, что при фиксированном $g \in G$ отображение $\alpha_g\colon X \to X$, $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ является биекцией. В самом деле, легко убедиться, что $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$, при этом $\alpha_e = \mathrm{id}$. Это означает, что $\alpha_{g^{-1}}$ – обратное отображение к α_g. Таким образом, мы получаем гомоморфизм φ_α из G в $S(X)$. Напомним, что $S(X)$ – это группа биекций $X \to X$. Гомоморфизм φ_α определяется следующим образом: $\varphi_\alpha(g) = \alpha_g$.

Наоборот, если дан гомоморфизм $\varphi\colon G \to S(X)$, то можно определить действие α_φ группы G на X следующим образом: $g \cdot x = \varphi(g)(x)$.

Лемма 1. *Отображения $\Phi\colon \alpha \mapsto \varphi_\alpha$ и $\Psi\colon \varphi \mapsto \alpha_\varphi$ являются взаимно обратными и, следовательно, устанавливают биекцию между действиями G на X и гомоморфизмами из G в $S(X)$.*

Доказательство. Пусть β – некоторое действие G на X. Имеем $\Psi \circ \Phi(\beta) = \Psi(\varphi_\beta)$. По определению, это действие устроено по правилу $g \cdot x = \varphi_\beta(g)(x)$. С другой стороны по определению $\varphi_\beta(g) = \beta_g$, то есть $\varphi_\beta(g)(x) = \beta_g(x) = \beta(g, x)$. Таким образом $\Psi \circ \Phi(\beta) = \beta$, то есть $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

Пусть теперь $\varphi\colon G \to S(X)$ – гомоморфизм. Тогда $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \Phi(\alpha_\varphi)$. По определению Φ имеем $\Phi(\alpha_\varphi)(g)(x) = \alpha_\varphi(g, x) = \varphi(g)(x)$. Так как это верно для любого x и для любого g имеем $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \varphi$, то есть $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. □

Следующие два определения играют центральную роль в теории действий.

Определение 2. Пусть G действует на X и $x \in X$. Орбитой элемента x называется множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$.

Определение 3. Пусть G действует на X и $x \in X$. Стабилизатором элемента x называется множество $\mathrm{St}(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Лемма 2. *Орбиты – это классы эквивалентности, и следовательно, орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Докажем, что отношение "$x \sim y$ если x лежит в орбите Gy"является отношением эквивалентности.

1) Рефлексивность. $x \sim x$ так как $e \cdot x = x$, а значит, $x \in Gx$.

2) Симметричность. Если $x \sim y$, то найдется $g \in G$ такое, что $g \cdot y = x$. Значит, $g^{-1} \cdot x = y$, то есть $y \sim x$.

3) Транзитивность. Пусть $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда $x = g \cdot y$, $y = \overline{g} \cdot z$. Тогда $x = (g\overline{g}) \cdot z$. Следовательно, $x \sim z$. □

Лемма 3. *Стабилизатор $\mathrm{St}(x)$ является подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $g, h \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$, то есть $gh \in \mathrm{St}(x)$, а значит, множество $\mathrm{St}(x)$ замкнуто относительно умножения.

Если $g \in \mathrm{St}(x)$, то $g \cdot x = x$. Подействуем на обе части этого равенства элементом g^{-1}. Получим $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$. Но $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x$. Значит, $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$, то есть $\mathrm{St}(x)$ замкнут относительно взятия обратного.

Осталось заметить, что единица группы лежит в стабилизаторе любого элемента. $\square$

Пусть G группа и H – ее подгруппа. Пусть $g \in G$. Через gHg^{-1} мы обозначаем множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Отображение $h \mapsto ghg^{-1}$ устанавливает изоморфизм (биекцию, переводящую умножение в умножение) между H и gHg^{-1}. Следовательно, gHg^{-1} – подгруппа, изоморфная H. Эта подгруппа называется подгруппой, сопряженной к H.

Лемма 4. *Пусть $y = g \cdot x$. Тогда $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. (Стабилизаторы элементов одной орбиты сопряжены.)*

Доказательство. Докажем, что $\mathrm{St}(y) \supseteq g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. Пусть $h \in \mathrm{St}(x)$. Тогда

$$(ghg^{-1}) \cdot y = (ghg^{-1}) \cdot (g \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y.$$

Но аналогично, так как $x = g^{-1} \cdot y$, имеем $\mathrm{St}(x) \supseteq g^{-1}\mathrm{St}(y)g$. А значит,

$$g\mathrm{St}(x)g^{-1} \supseteq \mathrm{St}(y).$$

Так как доказаны включения в обе стороны, получаем $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. $\square$

Следствие 1. *Если группа G абелева, то стабилизаторы элементов в одной орбите совпадают.*

Теорема 1. *Существует биекция между множеством левых смежных классов группы G по подгруппе $\mathrm{St}(x)$ и элементами орбиты Gx.*

Доказательство. Определим отображение ψ, которое сопоставляет смежному классу $g\mathrm{St}(x)$ элемент орбиты $g \cdot x$. Прежде всего нужно проверить корректность этого отображения, то есть что если $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$, то $g \cdot x = h \cdot x$. В самом деле $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$ тогда и только тогда, когда $h^{-1}g \in \mathrm{St}(x)$, то есть $g = hs$, где $s \in \mathrm{St}(x)$. Получаем $g \cdot x = h \cdot (s \cdot x) = h \cdot x$. Итак, ψ определено корректно.

Пусть $\psi(g\mathrm{St}(x)) = \psi(h\mathrm{St}(x))$, тогда $g \cdot x = h \cdot x$. Подействуем на последнее равенство элементом h^{-1}. Получим $(h^{-1}g) \cdot x = x$, то есть $h^{-1}g \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $g\mathrm{St}(x) = h\mathrm{St}(x)$, то есть ψ – инъекция.

То, что ψ сюръективно следует из того, что в элемент орбиты $g \cdot x$ переходит смежный класс $g\mathrm{St}(x)$. $\square$

Следствие 2 (Формула орбит). *Пусть G – конечная группа. Тогда $|G| = |Gx| \cdot |\mathrm{St}(x)|$.*

С помощью только что доказанной формулы посчитаем количество элементов в группе вращений куба $\mathrm{Sym}_+(K)$. Данная группа состоит из всех движений $\mathbb{R}^3$, сохраняющих ориентацию. (Так как центр куба остается неподвижен, то движение, сохраняющее куб является линейным преобразованием. Ориентацию сохраняют те движения, определитель которых равен 1.)

Предложение 1. *Порядок группы $\mathrm{Sym}_+(K)$ равен 24.*

Доказательство. Рассмотрим куб K с вершинами $ABCDA'B'C'D'$. Есть естественное действие $\mathrm{Sym}_+(K)$ на множестве $\{A, B, C, D, A'B'C'D'\}$. В группе $\mathrm{Sym}_+(K)$ содержится вращение относительно оси, соединяющей две противоположные грани. С помощью композиции таких вращений можно перевести любую вершину в любую другую. Значит, орбита точки A состоит из 8 точек. По следствию 2 получаем

$$|\mathrm{Sym}_+(K)| = |\mathrm{Sym}_+(K)A| \cdot |\mathrm{St}(A)| = 8 \cdot |\mathrm{St}(A)|.$$

Осталось найти $|H|$, где $H = \mathrm{St}(A)$. Пусть вершины, смежные с A – это B, D и A'. Получаем естественное действие H на множестве $\{B, D, A'\}$. Легко видеть, что в группе H лежат вращения относительно диагонали AC' на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Они переводят B в D и A' соответственно. Значит, действие H на $\{B, C, D\}$ имеет единственную орбиту $|HB| = 3$. При этом по следствию 2 получаем

$$|H| = |HB| \cdot |\mathrm{St}_H(B)| = 3|\mathrm{St}_H(B)|.$$

(Здесь мы используем индекс в $\mathrm{St}_H(B)$, чтобы подчеркнуть, что это стабилизатор при действии группы H, а не при действии группы G.) Осталось найти $|\mathrm{St}_H(B)|$. Пусть $\xi \in |\mathrm{St}_H(B)$. Тогда $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Поскольку смежные с A вершины – это B, D и A', получаем, что либо $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$, либо $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$. Но если $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$, то ψ меняет ориентацию. Следовательно, $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$, $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$. То есть ψ сохраняет 4 точки не лежащие в одной плоскости. Значит, $\psi = \mathrm{id}$. Следовательно, $|\mathrm{St}_H(B)| = 1$. Таким образом

$$|\mathrm{Sym}_+(K)| = 8 \cdot |\mathrm{St}(A)| = 24 \cdot |\mathrm{St}_H(B)| = 24.$$

$\square$