Лекция 12

Предложение 1. *Группа вращений куба изоморфна S_4.*

Доказательство. Группа $\mathrm{Sym}_+(K)$ действует на множестве диагоналей куба. (Очевидно, что любой элемент этой группы переводит диагонали в диагонали, то есть производит перестановку диагоналей. При этом композиция элементов дает композицию перестановок.) То есть мы имеем гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{Sym}_+(K) \to S_4$. Поскольку $|\mathrm{Sym}_+(K)| = |S_4| = 24$, для того, чтобы доказать, что φ – изоморфизм достаточно доказать, что φ – сюръекция. Пусть K – середина ребра AA', а L – середина ребра CC'. Рассмотрим ξ вращение на π вокруг KL. Ясно, что $\xi \in \mathrm{Sym}_+(K)$.

$$\xi(A) = A', \xi(A') = A, \xi(C) = C', \xi(C') = C, \xi(B) = D', \xi(D') = B, \xi(B') = D, \xi(D) = B'.$$

Значит, применение ξ меняет местами диагонали AC' и $A'C$ и оставляет на месте диагонали BD' и $B'D$. То есть образ ξ в S_4 – это транспозиция. Но аналогично мы можем доказать, что любая транспозиция лежит в образе φ. Поскольку S_4 порождается транспозициями, φ – сюръекция. □

Аналогично докажем другую геометрическую реализацию группы S_4. Напомним, что группа симметрий фигуры – это группа всех движений пространства (для плоской фигуры – плоскости), сохраняющих данную фигуру. (Группа симметрий не состоит только из симметрий относительно плоскостей/прямых!)

Предложение 2. *Группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4.*

Доказательство. Группа симметрий правильного тетраэдра действует на множестве его вершин (их 4). получаем гомоморфизм из этой группы в S_4. Этот гомоморфизм инъективен, так как у него тривиальное ядро. В самом деле, если некое преобразование плоскости лежит в ядре, то оно оставляет на месте вершины тетраэдра (4 точки, не лежащие в одной плоскости), а значит, это тождественное преобразование. Теперь докажем сюръективность данного гомоморфизма. Рассмотрим симметрию относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра. Данная симметрия меняет ровно 2 вершины. Значит, в образе нашего гомоморфизма лежат транспозиции. Так как они порождают S_4, гомоморфизм сюръективен. Итак, мы построили гомоморфизм из группы симметрий правильного тетраэдра в S_4, который является биекцией, то есть изоморфизмом. □

Определение 1. *Ядро неэффективности* действия $\alpha\colon G \times X \to X$ – это множество $\mathrm{Ker}\,\alpha = \{g \in G \mid \forall x \in X: \ g \cdot x = x\}$. Если ядро действия состоит только из единицы группы G, то действие называется *эффективным.*

Из определения следует, что ядро неэффективности совпадает с пересечением всех стабилизаторов всех элементов $x \in X$.

Лемма 1. *Ядро неэффективности действия α является нормальной подгруппой в группе G.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $\mathrm{Ker}\,\alpha$ совпадает с ядром гомоморфизма $\mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha$. □

Предложение 3. *Действия группы G на X с ядром неэффективности, содержащим нормальную подгруппу H, находятся в биекции с действиями G/H на X.*

Доказательство. Пусть $\varphi_\alpha\colon G\to S(X)$ – гомоморфизм, соответствующий α. При этом $H\subset \operatorname{Ker}\alpha$. Рассмотрим $\psi\colon G/H\to S(X)$, $\psi(gH)=\varphi(g)$. Проверим, что ψ определено корректно, то есть что если $gH=\overline{g}H$, то $\varphi(g)=\varphi(\overline{g})$. В самом деле если $gH=\overline{g}H$, то $g^{-1}\overline{g}=h\in H$. Тогда $\overline{g}=gh$ и $\varphi(\overline{g})=\varphi(g)\varphi(h)=\varphi(g)$.

Отображение ψ является гомоморфизмом, так как

$$\psi((g_1H)\cdot(g_2H))=\psi(g_1g_2H)=\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)=\psi(g_1H)\psi(g_2H).$$

Гомоморфизм ψ соответствует действию α_ψ группы G/H на X.

Напротив, если дано действие $G/H\curvearrowright X$, то ему соответствует гомоморфизм $\psi\colon G/H\to S(X)$. Если взять композицию с каноническим гомоморфизмом

$$\pi_H\colon G\to G/H,$$

то получим гомоморфизм $\varphi=\psi\circ\pi_H\colon G\to S(X)$. Последний гомоморфизм соответствует действию G на X. Поскольку $\operatorname{Ker}\pi_H=H$, ядро ψ содержит H, а значит, H содержится в ядре неэффективности полученного действия G на X.

(Это предложение легко может быть выведено из предложения 1 в лекции 6. На лекции было так и рассказано.) □

Определение 2. Действия $\alpha\colon G\times X\to X$ и $\beta\colon G\times Y\to Y$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\psi\colon X\to Y$ такие, что $\beta(g,\psi(x))=\psi(\alpha(g,x))$ для любых $g\in G$ и $x\in X$.

Определение 3. Действие $G\curvearrowright X$ называется *транзитивным*, если у него ровно одна орбита, то есть если для любых $x,y\in X$ существует $g\in G$ такое, что $g\cdot x=y$.

Как уже было упомянуто, ядро неэффективности действия – это пересечение всех стабилизаторов. Действие эффективно, если пересечение всех стабилизаторов состоит только из единицы.

Определение 4. Действие называется *свободным*, если стабилизатор каждого элемента $x\in X$ тривиален, то есть равен $\{e\}$.

Теорема 1. *Любое свободное транзитивное действие группы G на некотором множестве изоморфно действию G на себе левыми сдвигами.*

Доказательство. Пусть $\beta\colon G\times X\to X$ – свободное транзитивное действие. Пусть $\alpha\colon G\times G\to G$, $g\cdot g'=gg'$ – действие G правыми сдвигами на себе. Рассмотрим любой элемент $y\in X$. Определим отображение $\psi\colon G\to X$ по формуле

$$\psi(g)=\beta(g,y)=g\cdot y.$$

Докажем, что ψ – биекция. Сюръективность ψ следует из того, что действие β транзитивно. Проверим инъективность. Пусть $\psi(g)=\psi(g')$. Тогда $g\cdot y=g'\cdot y$. Следовательно, $(g^{-1}g)\cdot y=y$, то есть $g^{-1}g'\in\operatorname{St}(y)$. Но так как действие β свободно, получаем $\operatorname{St}(y)=\{e\}$, а значит, $g^{-1}g'=e$, то есть $g=g'$.

Имеем

$$\beta(g,\psi(\overline{g}))=\beta(g,\overline{g}\cdot y)=g\cdot(\overline{g}\cdot y)=(g\overline{g})\cdot y.$$

С другой стороны

$$\psi(\alpha(g,\overline{g}))=\psi(g\overline{g})=(g\overline{g})\cdot y.$$

Таким образом,

$$\beta(g),\psi(\overline{g}))=\psi(\alpha(g,\overline{g})),$$

то есть действия α и β изоморфны. □

Теперь рассмотрим действие группы G на себе сопряжениями. Орбиты и стабилизаторы при этом действии имеют отдельные названия. Орбиты называются *классами сопряженности*, а стабилизаторы – *централизаторами*. Класс сопряженности элемента $g \in G$ обозначается $C(g)$, а централизатор элемента g обозначается $Z(g)$. Формула орбит, примененная к действию G на себе сопряжениями, дает формулу $|C(g)| \cdot |Z(g)| = |G|$.

Замечание 1. Заметим, что и класс сопряженности и централизатор зависят не только от самого элемента g, но и от того, элементом какой группы он рассматривается. Путаница может произойти, например, в случае, когда в группе G есть подгруппа H. Тогда любой элемент $h \in H$ можно рассматривать как элемент G, а можно – как элемент H. Чтобы различать эти ситуации будем там, где это необходимо писать группу в качестве индекса. При этом может так случиться, что $C_G(g) \neq C_H(g)$ и $Z_G(g) \neq Z_H(g)$. Однако легко видеть, что всегда имеются включения в одну сторону: $C_H(g) \subset C_G(g)$, $Z_H(g) \subset Z_G(g)$.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Лемма 2. *Подгруппа $H \subset G$ является нормальной тогда и только тогда, когда H состоит из классов сопряженности. (Имеется в виду, что каждый класс сопряженности либо целиком содержится в H, либо целиком содержится в дополнениии к H.)*

Доказательство. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда для любых $h \in H$ и $g \in G$ выполнено $ghg^{-1} \in H$. То есть для любого $h \in H$ выполнено $C(h) \subset H$. □

Для того, чтобы описывать нормальные подгруппы (и для других целей) бывает удобно явно описать классы сопряженности в группе.

Напомним доказанное в лекции 8 утверждение.

Лемма 3 (Предложение 1 из лекции 8)**.** *Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $C_{S_n}(\sigma)$ состоит из всех перестановок $\delta \in S_n$ с такой же цикловой структурой.*

Задача 1. Найдите все нормальные подгруппы в S_4.

Задача 2. Пусть $\sigma \in A_n$. Докажите, что $C_{S_n}(\sigma)$ либо совпадает с $C_{A_n}(\sigma)$, либо есть объединение двух равномощных классов сопряженности в A_n. А именно, $C_{S_n}(\sigma)$ совпадает с $C_{A_n}(\sigma)$, если в разложении на независимые циклы перестановки из данного класса сопряженности есть цикл четной длины или 2 цикла одинаковой нечетной длины.

Определение 5. Группа G называется p-группой, если $|G| = p^k$ для простого p и некоторого натурального k.

Теорема 2. *Центр p-группы не равен $\{e\}$.*

Доказательство. Заметим, что центр состоит из всех элементов, классы сопряженности которых состоят ровно из одного элемента. Пусть $|G| = p^k$. В пусть $g \in G$. Тогда

$$|C(g)| = \frac{|G|}{|Z(g)|} = p^m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, порядок любого смежного класса $C(g)$ либо равен 1, либо делится на p. Получаем, что $G \setminus Z(G)$ разбивается на классы сопряженности, порядок которых делится на p, а значит, $|G| - |Z(G)|$ делится на p. Отсюда $|Z(G)|$ делится на p. Следовательно, $Z(G) \neq \{e\}$. □

Следствие 1. *Группа порядка p^2 абелева.*

Доказательство. Пусть $|G| = p^2$. Тогда, так как $|G|$ делится на $|Z(G)|$, есть 3 варианта: $|Z(G)| = 1$, $|Z(G)| = p^2$ и $|Z(G)| = p$. Первый случай не возможен по предыдущей теореме. Второй соответствует абелевой группе. Осталось показать, что не может быть $|Z(G)| = p$. Допустим, что $|Z(G)| = p$, тогда $|G/Z(G)| = p$. Значит, группа $G/Z(G)$ циклическая. Это противоречит предложению 1 из лекции 5. □

Пусть задано действие G на X. Для $g \in G$ обозначим через X^g множество

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Лемма 4 (Лемма Бернсайда)**.** *Пусть конечная группа G действует на множестве X тогда количество орбит этого действия равно*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Доказательство. Посчитаем двумя различными способами количество пар (x, g) таких, что $g \cdot x = x$. Обозначим множество таких пар за M. Тогда с одной стороны

$$|M| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

С другой стороны

$$|M| = \sum_{x \in X} |\mathrm{St}(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}. \qquad (**)$$

В последней сумме заметим, что суммирование по всему X можно разбить на суммирование по непересекающимся орбитам. Пусть O – одна из орбит. Тогда

$$\sum_{x \in O} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in O} \frac{1}{|O|} = 1$$

Значит, самое правое выражение в $(**)$ равно $|G|$ умножить на количество орбит. Приравнивая ко второму выражению для $|M|$ и разделив на $|G|$, получаем утверждение леммы. □

Замечание 2. Если множество X бесконечно, то обе части равенства из леммы Бернсайда будут бесконечны. В самом деле, количество орбит бесконечно так как количество элементов в каждой орбите не больше $|G|$. Выражение $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$ бесконечно, так как $X^e = X$ – бесконечное множество.

Пример 1. *Решим с помощью леммы Бернсайда такую задачу: сколько существует различных способов покрасить ребра проволочного правильного 7-угольника в 3 цвета? (Имеется в виду, что этот проволочный 7-угольник находится в трехмерном пространстве и две покраски одинаковы, если их можно совместить.)*

Рассмотрим закрепленные покраски 7-угольника, то есть занумеруем ребра и для каждого ребра будет 3 варианта покрасить его. Таких закрепленных покрасок существует 3^7. На множестве X закрепленных покрасок действует группа D_7 и нам нужно посчитать количество орбит (так как фраза "окраски одинаковы, если их можно совместить"означает, что покраски считаются одинаковыми, если лежат в одной орбите).

Чтобы применить формулу из леммы Бернсайда нужно посчитать $|X^g|$ *для всех* $g \in D_7$. *Для* $g = e$ *имеем* $|X^e| = 3^7$. *Для любого нетривиального поворота легко видеть, что* X^g *состоит только из одноцветных закрепленных покрасок, а значит,* $|X^g| = 3$. *Для симметрии все врешины 7-угольника разбиваются на 3 пары симметричных вершин и одну, лежащую на оси симметрии. Количество покрасок из* $|X^g|$ *равно* 3^4 *так как каждую пару надо покрасить в один цвет. В итоге количество орбит равно*

$$\frac{1}{14}(3^7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3^4) = 198.$$