Лекция 14

Предложение 1. *Пусть G – группа и A – абелева группа. Пусть $\varphi\colon G/G' \to A$ – гомоморфизм. Сопоставим ему гомоморфизм $\Psi(\varphi) = \varphi \circ \pi_{G'}\colon G \to A$. Данное сопоставление является биекцией между гомоморфизмами $G \to A$ и гомоморфизмами $G/G' \to A$.*

Доказательство. Данное предложение является следствием из предложения 1 лекции 6. В самом деле, ясно, что Ψ переводит гомоморфизмы $G/G' \to A$ в гомоморфизмы $G \to A$ и является инъекцией. А предложения 1 лекции 6 обеспечивает сюръективность Ψ. $\square$

Лемма 1. *Факторгруппа разрешимой группы разрешима.*

Доказательство. Пусть $G \triangleright H$. На предыдущей лекции было доказано, что

$$(G/H)' \cong G'/(H \cap G').$$

Применяя эту же формулу, получаем

$$(G'/(H \cap G'))' \cong G''/((H \cap G') \cap G'') = G''/(H \cap G'').$$

Значит, $(G/H)'' \cong G''/(H \cap G'')$. Аналогично, $(G/H)^{(i)} \cong G^{(i)}/(H \cap G^{(i)})$. Поскольку G разрешима, найдется натуральное n такое, что $G^{(n)} = \{e\}$. Тогда $(G/H)^{(n)} = \{e\}$. $\square$

Теорема 1 (Критерий разрешимости группы.)**.** *Пусть $G \triangleright H$. Тогда G разрешима тогда и только тогда, когда H разрешима и G/H разрешима.*

Доказательство. В одну сторону (из разрешимости G следует разрешимость H и G/H) утверждение теоремы сводится к предыдущим леммам.

Пусть теперь H и G/H разрешимы. Как было доказано ранее $(G/H)^{(i)} \cong G^{(i)}/(H \cap G^{(i)})$. Найдется такое натуральное m, что $(G/H)^{(m)} = \{e\}$. Тогда $G^{(m)}/(H \cap G^{(m)}) = \{e\}$, а значит, $G^{(m)} \subset H$. Но поскольку H разрешима, найдется натуральное k такое, что $H^{(k)} = \{e\}$. Следовательно $G^{(m+k)} = \{e\}$. То есть G разрешима. $\square$

Следствие 1. *Пусть задан гомоморфизм $\psi\colon G \to H$. Тогда G разрешима если и только если $\operatorname{Ker}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ разрешимы.*

Доказательство. Ядро гомоморфизма – нормальная подгруппа, фактор по которой изоморфен образу. $\square$

Предложение 2. *Группа B_n невырожденных верхнетреугольных матриц над полем F разрешима.*

Доказательство. Пусть U_n – группа верхнетреугольных матриц $n \times n$ с единицами на диагонали. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon B_n \to (F^\times)^n$,

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & a_n. \end{pmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

Очевидно, что $\operatorname{Ker}\varphi = U_n$, а $\operatorname{Im}\varphi = (F^\times)^n$. Так как образ – абелева группа, он разрешим. Значит, чтобы доказать разрешимость B достаточно доказать разрешимость U_n.

Рассмотрим гомоморфизм (проверьте это!) $\psi\colon U_n \to F^{n-1}$, заданный по правилу

$$\psi\colon \begin{pmatrix} 1 & b_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (b_1, \dots, b_n)$$

Образ ψ лежит в коммутативной группе. Значит, он разрешим. Ядро ψ – подгруппа

$$U_{n1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\psi_2\colon U_{n1} \to F^{n-2}$:

$$\psi_2\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & c_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (c_1, \dots, c_n).$$

Образ ψ_2 абелев, и значит разрешим, а ядро – подгруппа U_{n2},

$$U_{n2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

И т.д. Каждый раз разрешимость U_{ni} сводится к разрешимости $U_{n,i+1}$. Поскольку $U_{n,n-1} = \{e\}$, она разрешима. Это завершает доказательство разрешимости B_n. $\square$

Лемма 2. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G. Допустим, что в группе G/H есть нормальная подгруппа $\{e\} \subsetneq K \subsetneq G/H$. Тогда $L = \pi_H^{-1}(K)$ – нормальная подгруппа в группе G, причем $H \subsetneq L \subsetneq G$.*

Доказательство. Проверим то, что прообраз группы при гомоморфизме является группой. Пусть $l_1, l_2 \in L$. Тогда $\pi_H(l_2 l_2) = \pi_H(l_1)\pi_H(l_2) \in K$. Следовательно, $l_1 l_2 \in L$. Также $\pi_H(l_1^{-1}) = \pi_H(l_1)^{-1} \in K$, значит, $l_1^{-1} \in L$. Кроме того $e \in L$. Значит, L – подгруппа.

Пусть $g \in G$, $l \in L$. Тогда $\pi_H(glg)^{-1} = \pi_H(g)\pi_H(l)\pi_H(g)^{-1} \in K$. Значит, $glg^{-1} \in L$. То есть L нормальна в G.

Так как π_H – сюръекция и $K \neq \{e\}$, получаем $L = \pi_H^{-1}(K) \supsetneq \pi_H^{-1}(e) = H$. Аналогично так как $K \neq G/H$, получаем $L = \pi_H^{-1}(K) \subsetneq \pi_H^{-1}(G/H) = G$. $\square$

Определение 1. Группа G называется *простой*, если у нее нет нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и самой G.

Определение 2. Назовем *субнормальным* рядом группы G ряд подгрупп

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\},$$

каждая следующая из которых нормальна в предыдущей. Этот ряд называется *композиционным рядом группы* G, если все факторгруппы G_i/G_{i+1} простые.

Предложение 3. *Для конечной группы любой субнормальный ряд может быть уплотнен до композиционного.*

Доказательство. Если факторгруппа G_i/G_{i+1} не простая, то по лемме 2 можно уплотнить субнормальный ряд, то есть добавить в него еще одну подгруппу. Так как группа G конечна, уплотнение не может происходить бесконечно. $\square$

Предложение 4. *Абелева группа проста тогда и только тогда, когда она изоморфна* $\mathbb{Z}_p$ *для простого* p.

Доказательство. В абелевой группе все подгруппы являются нормальными. Поэтому абелева группа проста тогда и только тогда, когда в ней нет других подгрупп, кроме $\{e\}$ и G. Для каждого $g \in G$ можно рассмотреть циклическую подгруппу $\langle g \rangle \subset G$. Если $g \neq e$, то $\langle g \rangle \neq \{e\}$. Значит, $\langle g \rangle = G$, то есть G – циклическая. Если $G \cong \mathbb{Z}$, то в ней есть нетривиальные подгруппы $k\mathbb{Z}$. Если же $G \cong \mathbb{Z}_{ab}$, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то в G есть нетривиальная подгруппа $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_b$. $\square$

Теорема 2 (Жордан-Гельдер)**.** *Факторы* G_i/G_{i+1} *композиционного ряда определены однозначно с точностью до перестановки.*

Теорема Жордана-Гельдера связывает с любой группой некоторый набор простых групп (факторов композиционного ряда). Это дает мотивацию изучать простые группы. Например, очень популярной темой является классификация конечных простых групп. Конечные простые группы содержат несколько серий (одна из котрорых – это группы $A_n, n \in \mathbb{N}$). Также есть (довольно большие) единичные примеры групп, они называются *спорадическими*. Различные математики не сходятся во мнении, можно ли считать классификацию конечных простых групп завершенной. Дело в том, что она содержится в большом количестве работ и все эти работы не может прочитать за свою жизнь один человек.

Стоит упомянуть, что изучение простых факторов композиционного ряда не дает полной классификации групп, так как могут быть различные группы с одинаковым набором факторов.

Теорема 3. *Группа* A_n *проста при* $n \geq 5$.

Сперва докажем следующие две леммы.

Лемма 3. *При* $n \geq 5$ *все циклы длины 3 сопряжены в* A_n.

Доказательство. Докажем, что любой тройной цикл (a, b, c) сопряжен циклу $(1, 2, 3)$. В S_n эти циклы сопряжены перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & u & v & \ldots \end{pmatrix},$$

то есть $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = (a, b, c)$. Если σ – четная перестановка, то $(1, 2, 3)$ и (a, b, c) сопряжены в A_n. Если же σ – нечетная перестановка, то рассмотрим

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & v & u & \ldots \end{pmatrix} \in A_n.$$

Тогда $\widehat{\sigma}(1,2,3)\widehat{\sigma}^{-1}=(a,b,c)$ $\square$

Лемма 4. *В A_n все пары несмежных транспозиций сопряжены.*

Доказательство. Пусть $\sigma=(a,b)(c,d)$ – пара несмежных транспозиций. Докажем, что σ сопряжена $(1,2)(3,4)$. Возьмем

$$\xi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots\\a&b&c&d&\dots\end{pmatrix}\in S_n.$$

Тогда $\xi(1,2)(3,4)\xi^{-1}=\sigma$. Если $\xi\in A_n$, то $(1,2)(3,4)$ и σ сопряжены в A_n. Если же ξ – нечетная перестановка, то рассмотрим

$$\widehat{\xi}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots\\b&a&c&d&\dots\end{pmatrix}\in A_n.$$

Имеем $\widehat{\xi}(1,2)(3,4)\widehat{\xi}^{-1}=\sigma$, то есть $(1,2)(3,4)$ и σ сопряжены в A_n. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть H – нормальная подгруппа в A_n.

Случай 1. В H есть тройной цикл (abc). Поскольку H нормальна в A_n, а все тройные циклы в A_n сопряжены (по лемме 3), то все тройные циклы лежат в H. Поскольку A_n порождается тройными циклами (см. лемму **??**), $H=A_n$.

Случай 2. В H есть перестановка δ, в разложении которой есть цикл длины не менее 5.

$$\delta=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots,x_m)(\dots)\dots(\dots)$$

Сопряжем δ с помощью перестановки $\xi=(x_1x_3)(x_2x_4)$. Получаем

$$\begin{aligned}\xi\delta\xi^{-1}=(x_1x_3)(x_2x_4)(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots,x_m)(\dots)\dots(\dots)(x_1x_3)(x_2x_4)=\\=(x_3x_4x_1x_2x_5\dots,x_m)(\dots)\dots(\dots)\in H.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[(x_3,x_4,x_1,x_2,x_5,\dots,x_m)(\dots)\dots(\dots)]^{-1}\circ[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\dots,x_m)(\dots)\dots(\dots)]=\\=(x_2x_mx_4)\in H\end{aligned}$$

Попадаем в случай 1.

Случай 3. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы два цикла длины 3.

$$\sigma=(a,b,c)(d,e,f)\dots.$$

Тогда

$$(a,b,c,d,e)\sigma(a,b,c,d,e)^{-1}=(b,c,d)(e,a,f)\dots=\delta.$$

Имеем $\delta^{-1}\sigma=(a,d,f,c,e)$. Попадаем в случай 2.

Случай 4. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы три цикла длины 2. Сопряжем $\sigma=(a,b)(c,d)(e,f)\dots$ с помощью (a,b,c,d,e), получим

$$\delta=(bc)(de)(af)\dots.$$

Перемножив $\delta^{-1}\sigma$, получаем $(a,c,e)(b,f,d)$ и попадем в случай 3.

Случай 5. В H есть перестановка, разлагающаяся в 2 цикла длины 2. По лемме 4 там есть все пары несмежных транспозиций. А они порождают A_n.

Случай 6. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2 и 3 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 3. Если мы не в условиях случая 3, то в σ есть лишь 1 цикл длины 3. Возведем σ в квадрат, попадем в случай 1.

Случай 7. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2, 3 и 4 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 4. Возведем σ в квадрат, попадем в один из случев 6, 4 или 5.

$\square$