Лекция 17

Представления.

Пусть V – векторное пространство над некоторым полем F. Обозначим через $\mathrm{GL}(V)$ группу обратимых операторов $V \to V$.

Определение 1. *Линейным представлением* группы G называется гомоморфизм $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Пространство V называется *пространством представления.*

Если в V выбрать базис из n векторов, то каждому оператору сопоставляется матрица $n \times n$. Это устанавливает изоморфизм между $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{GL}_n(F)$.

Определение 2. *Матричным представлением* группы G называется гомоморфизм $G \to \mathrm{GL}_n(F)$.

Выбор базиса в V устанавливает биекцию между линейными и матричными представлениями. Если выбрать другой базис, то все матрицы представления сопрягутся матрицей перехода, то есть вместо операторов $\rho(g)$ мы получим операторы $C^{-1}\rho(g)C$ для некоторой фиксированной матрицы C. Далее мы зачастую не будем разделять линейное и соответствующие матричные представления, хотя нужно понимать, что каждому линейному сопроставляется много матричных представлений, так как существует много базисов.

Размерностью представления называется размерность пространства V. Мы ограничимся рассмотрением конечномерных представлений.

Пример 1. *Отображение $\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$ дает одномерное представление группы S_n.*

Замечание 1. Одномерные представления отождествляются с гомоморфизмами $G \to F^\times \cong \mathrm{GL}_1(F)$.

Пример 2. *Пусть ε_1 и ε_2 – корни из 1 степени n. Отображение $k \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^k \end{pmatrix}$ дает двумерное представление группы $\mathbb{Z}_n$.*

Пример 3. *Группа $\mathrm{GL}_n(F)$ имеет естественное n-мерное представление, при котором каждая матрица переходит в себя. Такое представление называется <u>тавтологическим</u>. Аналогичное представление можно рассмотреть для любой матричной группы: $\mathrm{SL}_n(F)$, $\mathrm{O}_n(F)$ и др.*

Замечание 2. Линейное представление задает действие группы G на V.

Определение 3. Предаставление $G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *точным*, если его ядро состоит только из нейтрального элемента.

Определение 4. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два представления одной и той же группы G. *Прямой суммой* представлений ρ и ζ называется представление $\rho \oplus \zeta\colon G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$, определенное по правилу:

$$\rho \oplus \zeta(g)(v + w) = \rho(g)(v) + \zeta(g)(w).$$

Если выбрать базис в $V \oplus W$, являющийся объединением базисов V и W, то матрица оператора $\rho \oplus \zeta(g)$ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \zeta(g) \end{pmatrix}.$$

Пример 4. *Следующее отображение дает двумерное представление группы $\mathbb{Z}_2$:*

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Оно является прямой суммой двух одномерных.

Определение 5. Пусть задан гомоморфизм групп $\varphi\colon G \to H$. Тогда по представлению $\rho\colon H \to \mathrm{GL}(V)$ можно построить представление $\rho \circ \varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Такая ситуация имеет место, например, если G – это подгруппа в H. В этом случае в качестве φ берем вложение $G \subset H$. Полученное представление $\rho \circ \varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *индуцированным* представлением.

Определение 6. Пусть даны представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$. *Морфизмом* представлений называется линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ такое, что для каждого $g \in G$ и для каждого $v \in V$ выполнено $\varphi(\rho(g)(v)) = \zeta(g)(\varphi(v))$.

Если φ – изоморфизм векторных пространств, то мы называем его *изоморфизмом* представлений.

Замечание 3. Если ρ и ζ – изоморфные линейные представления, то пространства V и W можно отождествить по изоморфизму φ. При этом базис V перейдет в базис W. Если взять эти соответствующие друг другу базисы и получить матричные представления, то получим одинаковые матричные представления.

Таким образом, матричные представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица C такая, что для каждого $g \in G$ выполнено $C\rho(g)C^{-1} = \zeta(g)$.

Выходит, что одному линейному представлению сопоставляется много матричных (при различных выборах базиса), но изоморфным линейным представлениям соответствуют одинаковые матричные (если базисы выбрать так, чтобы они переходили друг в друга при изоморфизме пространств, лучше сказать, что изоморфным линейным представлениям соответствуют одинаковые множества матричных).

Пример 5. *Рассмотрим следующее n-мерное представление группы S_n: перестановка σ переходит в матрицу A, где*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(j) = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такое представление называется <u>мономиальным</u>.

Например, при $n = 3$ получаем

$$\mathrm{id} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1,3,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. *Пусть G – конечная группа порядка n. Рассмотрим n-мерное пространство FG, базисные векторы которого мы индексируем элементами группы: $e_{g_1}, \dots, e_{g_n}$, где $G = \{g_1, \dots, g_n\}$. Зададим представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(FG)$ по правилу $\rho(g)(e_{g_i}) = e_{g \cdot g_i}$.*

Такое представление называется <u>регулярным</u> представлением группы G.

На самом деле данное представление есть композиция вложения $G \hookrightarrow S_n$, которое строится в теореме Кэли, и мономиального представления $S_n \to \mathrm{GL}_n(F)$.

На самом деле FG имеет более богатую структуру, чем просто векторное пространство. Элементы FG можно умножать друг на друга по правилу

$$\left(\sum_i \lambda_i e_{g_i}\right)\left(\sum_j \mu_j e_{g_j}\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j e_{g_i g_j}.$$

Определение 7. Множество R с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$ называется *кольцом*, если выполнено

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$,
2) существует 0 такой, что $a+0=0+a=a$,
3) для каждого a существует $(-a)$ такой, что $a+(-a)=(-a)+a=0$,
4) $a+b=b+a$,
5) $a(b+c)=ab+ac$,
6) $(a+b)c=ac+bc$.

Кольцо ассоциативно, если
7) $(ab)c=a(bc)$.
Кольцо с единицей, если
8) существует 1 такой, что $1a=a1=a$.
Кольцо коммутативно, если 9) $ab=ba$.
Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей называется *полем*, если выполнено
10) для каждого $a \neq 0$ найдется a^{-1} такой, что $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

Определение 8. Пусть фиксировано поле F. Множество A называется *алгеброй* (над F), если на нем определены три операции: сложение, умножение и умножение на скаляр (элемент поля F) такие, что

1) A с операциями сложения и умножения – это кольцо,
2) A с операциями сложения и умножения на скаляр – это векторное пространство над F,
3) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$.

Пример 7. *Матрицы $n \times n$ образуют ассоциативную алгебру с единицей.*

Упражнение 1. Проверьте, что FG – это ассоциативная алгебра с единицей. Она называется *групповой алгеброй* группы G.

В каком случае алгебра FG коммутативна?

Одномерные представления

Заметим, что одномерные матричные представления изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают. В самом деле, так как группа $\mathrm{GL}_1(F) \cong F^\times$ коммутативна, сопряжение в ней не изменяет представление.

Теорема 1. *Существует n различных (неизоморфных) комплексных одномерных представлений группы $\mathbb{Z}_n$*

Доказательство. Пусть $\rho\colon \mathbb{Z}_n \to F^\times$ – одномерное представление. Тогда

$$\rho(1)^n = \rho(n) = \rho(0) = 1.$$

То есть $\varepsilon = \rho(1)$ – корень n-ой степени из 1. При этом $\rho(k) = \varepsilon^k$, то есть образом единицы задается ρ. Наоборот, если взять в качестве ε любой корень из 1 n-ой степени, то получим одномерное представление по формуле $\rho(k) = \varepsilon^k$.

Получаем, что одномерных представлений группы $\mathbb{Z}_n$ столько же, сколько корней из 1 степени n. То есть в случае $F = \mathbb{C}$ их n. И все они имеют вид $\rho(k) = \varepsilon^k$ для некоторого корня из 1 n-ой степени ε. □

Следствие 1. *Пусть G – абелева группа порядка n. Существует n различных (неизоморфных) комплексных одномерных представлений группы G.*

Доказательство. Группа G изоморфна прямой сумме циклических групп

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Аналогично теореме элемент $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, где 1 стоит на i-м месте может переходить в любой корень n_i степени из 1. Если же $\rho((0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)) = \varepsilon_i$, то $\rho((a_1, \ldots, a_k)) = \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_k^{a_k}$. Число способов выбрать $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ равно n. □