Лекция 18

Напомним следующий факт:

Предложение 1. *(Предложение 1 из лекции 14) Пусть G – группа и A – абелева группа. Пусть $\varphi\colon G/G' \to A$ – гомоморфизм. Сопоставим ему гомоморфизм $\Psi(\varphi) = \varphi \circ \pi_{G'}\colon G \to A$. Данное сопоставление является биекцией между гомоморфизмами $G \to A$ и гомоморфизмами $G/G' \to A$.*

Следствие 1. *Любое одномерное представление $\rho\colon G \to F^\times$ группы G имеет вид $\zeta \circ \pi_{G'}$, где $\zeta\colon G/G' \to F^\times$ – одномерное представление группы G/G'. И это задает биекцию между одномерными представлениями G и одномерными представлениями G/G'.*

Доказательство. Утверждение следствия получается применением предложения 1 к случаю $A = F^\times$. □

Из предыдущего следствия и следствия 1 лекции 17 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *У группы G ровно $|G/G'|$ одномерных комплексных представлений.*

Определение 1. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – линейное представление. Подпространство $U \subset V$ называется *инвариантным*, если для любого $g \in G$ выполнено $\rho(g)(U) \subset U$.

Если U – инвариантное подпространство и мы выберем базис $e_1, \dots, e_k$ в U, а затем дополним его до базиса $e_1, \dots, e_n$ в V, то матрицы $\rho(g)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ будут иметь блочно-верхнетреугольный вид

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Определение 2. Представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *неприводимым* если не существует инвариантных подпространств $U \subset V$ кроме $\{0\}$ и V.

Мы будем рассматривать только конечномерные представления, если не оговорено другое.

Предложение 2. *Если F – алгебраически замкнутое поле, то любое неприводимое представление ρ абелевой группы G одномерно.*

Доказательство. Операторы $\rho(g)$ коммутируют между собой. Пусть $V_\lambda \neq \{0\}$ – собственное подпространство одного оператора $\rho(g_0)$. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$. Действительно, при $v \in V_\lambda$ имеем

$$\rho(g_0)(\rho(g)(v)) = \rho(g_0) \circ \rho(g)(v) = \rho(g) \circ \rho(g_0)(v) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda \rho(g)(v).$$

То есть $\rho(g)(v)$ – собственный вектор $\rho(g_0)$ с собственным значением λ.

Докажем по индукции по размерности n, что у представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем F есть одномерное инвариантное подпространство. База $n = 1$ очевидна. Шаг индукции. Если все операторы $\rho(g)$ скалярны, возьмем любое одномерное подпространство. Если есть $\rho(g_0)$ не скалярный. Пусть λ – его собственное значение. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$, а значит, у представления $\rho\,|_{V_\lambda}$ есть одномерное инвариантное подпространство. Оно же будет одномерным инвариантным подпространством для ρ. □

Замечание 1. Если отказаться от алгебраической замкнутости поля, то утверждение предыдущего предложения будет неверным. Действительно $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x. \end{pmatrix}$ является неприводимым 2-мерным представлением $(\mathbb{R}, +)$ над $\mathbb{R}$

Определение 3. Представление называется *вполне приводимым*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых.

Замечание 2. В частности любое неприводимое представление вполне приводимо.

Пример 1 (Пример не вполне приводимого представления)**.** *Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):*

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\langle e_1 \rangle$ – инвариантное подпространство. Но если бы это представление было вполне приводимым, оно бы раскладывалось в сумму двух одномерных. Тогда в подходящем базисе все матрицы были бы диагональны. Однако матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не диагонализуема.

Пусть U – инвариантное пространство представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Назовем U' *дополнительным* инвариантным пространством, если U' инвариантно и $V = U \oplus U'$.

Предложение 3. *Пусть ρ – конечномерное представление. Если для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное подпространство, то представление вполне приводимо.*

Доказательство. Докажем по индукции по размерности представления n. База при $n = 1$ очевидна.

Шаг индукции. Если ρ неприводимо, то оно вполне приводимо. Пусть это не так. Тогда есть инвариантное подпространство $U \subset V$. Тогда $V = U \oplus U'$, где U' – дополнительное инвариантное подпространство. И значит, $\rho = \rho\,|_U \oplus \rho\,|_{U'}$.

Докажем, что для представления $\rho\,|_U$ для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное. В самом деле, пусть $W \subseteq U$ – инвариантное подпространство $\rho\,|_U$. Тогда W – инвариантное подпространство ρ. По условию $V = W \oplus W'$, где W' – инвариантное подпространство. Тогда $U = W \oplus U \cap W'$, причем подпространство $U \cap W'$ инвариантно как пересечение двух инвариантных подпространств.

Аналогично для представления $\rho\,|_U'$ для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное. По предположению индукции представления $\rho\,|_U$ и $\rho\,|_{U'}$ вполне приводимы. Тогда ρ также вполне приводимо. $\square$

Определение 4. Оператор $P\colon V \to V$ называется *проектором*, если $V = U \oplus W$ и для любого вектора $v = u + w \in V$, где $u \in U$, $w \in W$, выполнено $P(v) = u$. Будем говорить, что P – *проектор на* U *вдоль* W.

Лемма 1. *Для оператора $P\colon V \to V$ следующие условия эквивалентны:*

1) $P^2 = P$;

2) P – проектор на $\operatorname{Im} P$ *вдоль* $\operatorname{Ker} P$.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. $P^2(u+w) = P(u) = P(u+0) = u = P(u+w)$. Значит, $P^2 = P$.

$1 \Rightarrow 2$. Любой вектор $v \in V$ можно представить в виде $v = P(v) + (v - P(v))$. Ясно, что $P(v) \in \operatorname{Im} P$. Проверим, что $v - P(v) \in \operatorname{Ker} P$. В самом деле $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$. Так как $\dim \operatorname{Ker} P + \dim \operatorname{Im} P = \dim V$, получаем $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$. При этом если $u \in \operatorname{Im} P$ и $w \in \operatorname{Ker} P$, то $u = P(z)$ и $P(u+w) = P(u) + P(w) = P^2(z) + 0 = P(z) = u$. $\square$