

ЛЕКЦИЯ 19

Определение 1. Характером конечномерного представления $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(F)$ называется функция $\chi_\rho: G \rightarrow F$, где $\chi_\rho(g) = \text{tr } \rho(g)$.

Замечание 1. Если мы возьмем изоморфное матричное представление ρ' , то $\text{tr } \rho'(g) = \text{tr } C\rho(g)C^{-1} = \text{tr } \rho(g)$. То есть характеры изоморфных представлений совпадают. В частности характер можно связать с линейным (а не матричным) представлением, так как он не зависит от того, какой базис мы выбрали.

Далее мы будем в основном интересоваться *комплексными характерами*, то есть характерами комплексных представлений.

Будем говорить, что характер *неприводим*, если соответствующее представление неприводимо.

Предложение 1. Пусть χ_ρ – характер комплексного представления ρ в пространстве V . Тогда

- 1) $\chi_\rho(e) = \dim V$;
- 2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, то есть характеры постоянны на классах сопряженности;
- 3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка;
- 4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

Доказательство. 1) Единичный элемент группы при представлении переходит в единичную матрицу, ее след равен размерности пространства.

2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \text{tr } (\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \text{tr } \rho(g) = \chi_\rho(g)$.

3) Если $g \in G$ – элемент порядка n , то $\rho(g)$ – диагонализуемая матрица, собственные значения которой – корни n -ой степени из 1. То есть в некотором базисе

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots, 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\rho(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & \dots, 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} & 0 & \dots, 0 \\ 0 & \overline{\varepsilon_2} & \dots, 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\varepsilon_{\dim V}} \end{pmatrix}.$$

Так как если $\varepsilon_i = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $\varepsilon_i^{-1} = (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \overline{\varepsilon_i}$.

4) В базисе, состоящем из базисов подпространств, на которых реализуются представления ρ_1 и ρ_2 , имеем

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\text{tr } \rho(g) = \text{tr } \rho_1(g) + \text{tr } \rho_2(g)$. □

Определение 2. Обозначим пространство всех функций $G \rightarrow \mathbb{C}$ через $\mathbb{C}^G$.

Функцию будем называть *центральной*, если она постоянна на классах сопряженности.

Лемма 1. Если группа G конечна, то полуторалинейная форма

$$(f, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}, \quad f, h \in \mathbb{C}^G$$

превращает $\mathbb{C}^G$ в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot, \cdot)$ – полуторалинейная функция и $(f, h) = \overline{(h, f)}$. Надо проверить лишь положительную определенность.

$$(f, f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 > 0, \text{ если } f \neq 0.$$

□

Замечание 2. Если применять две введенные формы к характеристам, то они совпадают, то есть $(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle$. В самом деле

$$\langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_\zeta(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\zeta(g)} = (\chi_\rho, \chi_\zeta).$$

Теорема 1 (Свойство ортогональности характеров). Пусть ρ и ζ – неприводимые комплексные представления конечной группы G . Тогда

$$(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \cong \zeta; \\ 0, & \text{если } \rho \not\cong \zeta. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\dim V} \rho_{ii}, \sum_{j=1}^{\dim W} \zeta_{jj} \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle$. Если $\rho \not\cong \zeta$, то $\langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle = 0$ для любых i, j . Если же $\rho \cong \zeta$, можно считать $\rho = \zeta$. Тогда

$$\langle \rho_{ii}, \rho_{jj} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \frac{1}{\dim V}, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad \text{В итоге } \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} = 1. \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $\rho = m_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus m_k \rho_k$ – разложение в прямую сумму неприводимых. Тогда $m_i = (\chi_\rho, \chi_{\rho_i})$.

Доказательство. $\chi_\rho = \sum m_j \chi_{\rho_j}$. Следовательно

$$(\chi_\rho, \chi_{\rho_i}) = \sum m_j (\chi_{\rho_j}, \chi_{\rho_i}) = m_i.$$

□

Определение 3. Пусть Γ – центральная функция на конечной группе G и пусть $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ – комплексное представление. Обозначим через $\psi(\rho, \Gamma)$ оператор $V \rightarrow V$, определенный по правилу

$$\psi(\rho, \Gamma) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g).$$

Предложение 2. Если ρ – неприводимое представление, то $\psi(\rho, \Gamma) = \lambda \text{id}$, где

$$\lambda = \frac{|G|}{\chi_\rho(e)} (\chi_\rho, \Gamma).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 \rho(g)\psi(\rho, \Gamma)\rho(g)^{-1} &= \rho(g) \left(\sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(h) \right) \rho(g)^{-1} = \\
 &= \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(g) \rho(h) \rho(g)^{-1} = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(ghg^{-1}) = \sum_{ghg^{-1} \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(ghg^{-1}) = \\
 &= \sum_{s \in G} \overline{\Gamma(g^{-1}sg)} \rho(s) = \sum_{s \in G} \overline{\Gamma(s)} \rho(s) = \psi(\rho, \Gamma).
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\rho(g)\psi(\rho, \Gamma) = \psi(\rho, \Gamma)\rho(g)$. По лемме Шура $\psi(\rho, \Gamma) = \lambda \text{id}$.
Теперь найдем λ .

$$\begin{aligned}
 \lambda \chi_\rho(e) &= \lambda \dim V = \text{tr}(\lambda \text{id}) = \text{tr} \psi(\rho, \Gamma) = \text{tr} \left(\sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g) \right) = \\
 &= \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \text{tr} \rho(g) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \chi_\rho(g) = |G| \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \chi_\rho(g) = |G|(\chi_\rho, \Gamma).
 \end{aligned}$$

$$\text{Получаем } \lambda = \frac{|G|(\chi_\rho, \Gamma)}{\chi_\rho(e)}.$$

□

Следствие 2. Если $(\chi_{\rho_i}, \Gamma) = 0$ для всех неприводимых характеров конечной группы G , то $\psi(\rho, \Gamma) = 0$ для любого представления ρ .

Доказательство. По теореме Машке любое представление группы G является прямой суммой неприводимых $\rho = m_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus m_s \rho_s$. Тогда $\psi(\rho, \Gamma) = \bigoplus_{i=1}^s m_i \psi(\rho_i, \Gamma) = 0$. □

Теорема 2. Характеры неприводимых комплексных представлений образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.

Доказательство. Мы знаем, что характеры неизоморфных неприводимых представлений ортогональны. Нужно лишь доказать, что они образуют полную систему. Для этого докажем, что если центральная функция ортогональна всем неприводимым характерам, то она нулевая.

Пусть Γ – центральная функция такая, что $(\chi_\rho, \Gamma) = 0$ для всех неприводимых ρ . Тогда для любого представления σ оператор $\psi(\sigma, \Gamma)$ нулевой. В частности это верно для регулярного представления $\sigma: G \rightarrow \mathbb{C}[G]$. Базис групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ обозначим через $\{u_g \mid g \in G\}$. Имеем $0 = \psi(\sigma, \Gamma)(u_e) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \sigma(g)(u_e) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} u_g$. Значит, $\overline{\Gamma(g)} = 0$ для всех g . То есть $\Gamma = 0$. □

Следствие 3. Количество неизоморфных комплексных представлений группы G равно количеству классов сопряженности в G .

Доказательство. Размерность пространства центральных функций равно количеству классов сопряженности в G . С другой стороны размерность пространства центральных функций равно мощности базиса, то есть количеству неприводимых представлений. □

Предложение 3. Каждое неприводимое комплексное представление ρ размерности n группы G входит в регулярное представление σ с кратностью n .

Доказательство. Кратность вхождения ρ в σ равно $(\chi_\sigma, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\sigma(g) \overline{\chi_\rho(g)}$. Но при $g \neq e$ оператор $\sigma(g)$ не оставляет ни одного вектора u_h на месте. Значит, $\chi_\sigma(g) = 0$ при $g \neq e$. При этом $\chi_\sigma(e) = |G|$. Получаем

$$(\chi_\sigma, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_\rho(e)} = \chi_\rho(e) = n.$$

□

Теорема 3. Пусть $\rho_1, \dots, \rho_k$ – все неизоморфные неприводимые комплексные представления группы G . Пусть размерность представления ρ_i равна n_i . Тогда $n_1^2 + \dots + n_k^2 = |G|$.

Доказательство. Мы знаем, что $\sigma = n_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus n_k \rho_k$. Получаем $|G| = \dim \sigma = n_1 \dim \rho_1 + \dots + n_k \dim \rho_k = n_1^2 + \dots + n_k^2$. □