Лекция 20

Определение 1. *Характером* конечномерного представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ называется функция $\chi_\rho\colon G \to F$, где $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}\rho(g)$.

Замечание 1. Если мы возьмем изоморфное матричное представление ρ', то $\operatorname{tr}\rho'(g) = \operatorname{tr} C\rho(g)C^{-1} = \operatorname{tr}\rho(g)$. То есть характоры изоморфных представлений совпадают. В частности характер можно связать с линейным (а не матричным) представлением, так как он не зависит от того, какой базис мы выбрали.

Далее мы будем в основном интересоваться *комплексными характерами*, то есть характерами комплексных представлений.

Будем говорить, что характер *неприводим*, если соответствующее представление неприводимо.

Предложение 1. *Пусть χ_ρ – характер комплексного представления ρ в пространстве V. Тогда*
1) $\chi_\rho(e) = \dim V$;
2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, то есть характеры постоянны на классах сопряженности;
3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка;
4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

Доказательство. 1) Единичный элемент группы при представлении переходит в единичную матрицу, ее след равен размерности пространства.

2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \operatorname{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \operatorname{tr}\rho(g) = \chi_\rho(g)$.

3) Если $g \in G$ – элемент порядка n, то $\rho(g)$ – диагонализуемая матрица, собственные значения которой – корни n-ой степени из 1. То есть в некотором базисе

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots, 0 & \\ 0 & \varepsilon_2 & \ldots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{\dim V} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\rho(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & \ldots, 0 & \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & \ldots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{\dim V}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} & 0 & \ldots, 0 & \\ 0 & \overline{\varepsilon_2} & \ldots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{\varepsilon_{\dim V}} \end{pmatrix}.$$

Так как если $\varepsilon_i = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\varepsilon_i^{-1} = (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = (\cos\varphi - i\sin\varphi) = \overline{\varepsilon_i}$.

4) В базисе, состоящем из базисов подпространств, на которых реализуются представления ρ_1 и ρ_2, имеем

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\operatorname{tr}\rho(g) = \operatorname{tr}\rho_1(g) + \operatorname{tr}\rho_2(g)$. $\square$

Определение 2. Обозначим пространство всех функций $G \to \mathbb{C}$ через $\mathbb{C}^G$.

Функцию будем называть *центральной*, если она постоянна на классах сопряженности.

Лемма 1. *Если группа G конечна, то полуторалинейная форма*

$$(f,h)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}, \qquad f,h\in\mathbb{C}^G$$

превращает $\mathbb{C}^G$ в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot,\cdot)$ – полуторалинейная функция и $(f,h)=\overline{(h,f)}$. Надо проверить лишь положительную определенность.

$$(f,f)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{f(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|f(g)|^2>0, \text{ если } f\neq 0.$$

$\square$

Замечание 2. Если применять две введенные формы к характерам, то они совпадают, то есть $(\chi_\rho,\chi_\zeta)=\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle$. В самом деле

$$\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\chi_\zeta(g^{-1})=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_\zeta(g)}=(\chi_\rho,\chi_\zeta).$$

Теорема 1 (Свойство ортогональности характеров)**.** *Пусть ρ и ζ – неприводимые комплексные представления конечной группы G. Тогда*

$$(\chi_\rho,\chi_\zeta)=\begin{cases}1, & \text{если } \rho\cong\zeta;\\ 0, & \text{если } \rho\ncong\zeta.\end{cases}$$

Доказательство. Имеем $(\chi_\rho,\chi_\zeta)=\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\dim V}\rho_{ii},\sum_{j=1}^{\dim W}\zeta_{jj}\right\rangle=\sum_{i,j}\langle\rho_{ii},\zeta_{jj}\rangle$. Если $\rho\ncong\zeta$, то $\langle\rho_{ii},\zeta_{jj}\rangle=0$ для любых i,j. Если же $\rho\cong\zeta$, можно считать $\rho=\zeta$. Тогда $\langle\rho_{ii},\rho_{jj}\rangle=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j;\\ \frac{1}{\dim V} & \text{если } i=j.\end{cases}$ В итоге $\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle=\sum_{i=1}^{\dim V}\frac{1}{\dim V}=1$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\rho=m_1\rho_1\oplus\ldots,\oplus m_k\rho_k$ – разложение в прямую сумму неприводимых. Тогда $m_i=(\chi_\rho,\chi_{\rho_i})$.*

Доказательство. $\chi_\rho=\sum m_j\chi_{\rho_j}$. Следовательно

$$(\chi_\rho,\chi_{\rho_i})=\sum m_j(\chi_{\rho_j},\chi_{\rho_i})=m_i.$$

$\square$

Определение 3. Пусть Γ – центральная функция на конечной группе G и пусть $\rho\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ – комплексное представление. Обозначим через $\psi(\rho,\Gamma)$ оператор $V\to V$, определенный по правилу

$$\psi(\rho,\Gamma)=\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\rho(g).$$

Предложение 2. *Если ρ – неприводимое представление, то $\psi(\rho,\Gamma)=\lambda\,\mathrm{id}$, где*

$$\lambda=\frac{|G|}{\chi_\rho(e)}(\chi_\rho,\Gamma).$$

Доказательство. Имеем

$$\rho(g)\psi(\rho,\Gamma)\rho(g)^{-1} = \rho(g)\left(\sum_{h\in G}\overline{\Gamma(h)}\rho(h)\right)\rho(g)^{-1} =$$
$$= \sum_{h\in G}\overline{\Gamma(h)}\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \sum_{h\in G}\overline{\Gamma(h)}\rho(ghg^{-1}) = \sum_{ghg^{-1}\in G}\overline{\Gamma(h)}\rho(ghg^{-1}) =$$
$$= \sum_{s\in G}\overline{\Gamma(g^{-1}sg)}\rho(s) = \sum_{s\in G}\overline{\Gamma(s)}\rho(s) = \psi(\rho,\Gamma).$$

Таким образом, $\rho(g)\psi(\rho,\Gamma) = \psi(\rho,\Gamma)\rho(g)$. По лемме Шура $\psi(\rho,\Gamma) = \lambda\,\mathrm{id}$.
Теперь найдем λ.

$$\lambda\,\chi_\rho(e) = \lambda\,\mathrm{dim}V = \mathrm{tr}\,(\lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{tr}\,\psi(\rho,\Gamma) = \mathrm{tr}\,\left(\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\rho(g)\right) =$$
$$= \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\mathrm{tr}\,\rho(g) = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\chi_\rho(g) = |G|\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\chi_\rho(g) = |G|(\chi_\rho,\Gamma).$$

Получаем $\lambda = \frac{|G|(\chi_\rho,\Gamma)}{\chi_\rho(e)}$. □

Следствие 2. *Если $(\chi_{\rho_i},\Gamma) = 0$ для всех неприводимых характеров конечной группы G, то $\psi(\rho,\Gamma) = 0$ для любого представления ρ.*

Доказательство. По теореме Машке любое представление группы G является прямой суммой неприводимых $\rho = m_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus m_s\rho_s$. Тогда $\psi(\rho,\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^s m_i\psi(\rho_i,\Gamma) = 0$. □

Теорема 2. *Характеры неприводимых комплексных представлений образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.*

Доказательство. Мы знаем, что характеры неизоморфных неприводимых представлений ортогональны. Нужно лишь доказать, что они образуют полную систему. Для этого докажем, что если центральная функция ортогональна всем неприводимым характерам, то она нулевая.

Пусть Γ – центральная функция такая, что $(\chi_\rho,\Gamma) = 0$ для всех неприводимых ρ. Тогда для любого представления σ оператор $\psi(\sigma,\Gamma)$ нулевой. В частности это верно для регулярного представления $\sigma\colon G \to \mathbb{C}[G]$. Базис групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ обозначим через $\{u_g \mid g \in G\}$. Имеем $0 = \psi(\sigma,\Gamma)(u_e) = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\sigma(g)(u_e) = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}u_g$. Значит, $\overline{\Gamma(g)} = 0$ для всех g. То есть $\Gamma = 0$. □

Следствие 3. *Количество неизоморфных комплексных представлений группы G равно количеству классов сопряженности в G.*

Доказательство. Размерность пространства центральных функций равно количеству классов сопряженности в G. С другой стороны размерность пространства центральных функций равно мощности базиса, то есть количеству неприводимых представлений. □

Предложение 3. *Каждое неприводимое комплексное представление ρ размерности n группы G входит в регулярное представление σ с кратностью n.*

Доказательство. Кратность вхождения ρ в σ равно $(\chi_\sigma, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_\sigma(g)\overline{\chi_\rho(g)}$. Но при $g \neq e$ оператор $\sigma(g)$ не оставляет ни одного вектора u_h на месте. Значит, $\chi_\sigma(g) = 0$ при $g \neq e$. При этом $\chi_\sigma(e) = |G|$. Получаем

$$(\chi_\sigma, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_\rho(e)} = \chi_\rho(e) = n.$$

□

Теорема 3. *Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k$ – все неизоморфные неприводимые комплексные представления группы G. Пусть размерность представления ρ_i равна n_i. Тогда $n_1^2 + \ldots + n_k^2 = |G|$.*

Доказательство. Мы знаем, что $\sigma = n_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus n_k\rho_k$. Получаем $|G| = \dim \sigma = n_1 \dim\, \rho_1 + \ldots + n_k \dim\, \rho_k = n_1^2 + \ldots + n_k^2$. □