Лекция 4

Определение 1. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ выполнено $gH = Hg$. То, что H – нормальная подгруппа G обозначается так: $G \triangleright H$.

Обозначим через gHg^{-1} множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Лемма 1. *Следующие условия равносильны:*
1) $G \triangleright H$,
2) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} = H$,
3) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} \subseteq H$,

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$ В множестве $gH = Hg$ каждый элемент имеет вид $gh_1 = h_2g$. При этом и h_1 и h_2 пробегают всю группу H. Домножим каждый элемент справа на g^{-1}, получим $gh_1g^{-1} = h_2$. То есть $gHg^{-1} = H$.

$2 \Longrightarrow 3$ Очевидно.

$3 \Longrightarrow 1$. Для каждых $g \in G$ и $h \in H$ выполнено $ghg^{-1} = \tilde{h} \in H$. Тогда $gh = ghg^{-1}g = \tilde{h}g$. Отсюда $gH \subseteq Hg$. Аналогично $hg = gg^{-1}hg = g\widehat{h}$ для $\widehat{h} = g^{-1}hg \in H$. Значит, $gH \supseteq Hg$. В итоге $gH = Hg$. □

Пример 1. *Любая подгруппа в абелевой группе нормальна, так как $ghg^{-1} = h$.*

Пример 2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *– нормальная подгруппа в* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Действительно, пусть $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Тогда* $\det(ABA^{-1}) = \det A \det B (\det A)^{-1} = 1$. *То есть $ABA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.*

Пример 3. *Подгруппа $\langle(1,2)\rangle = \{\mathrm{id}, (1,2)\} \subseteq S_3$ не является нормальной. В самом деле,*

$$(1,2,3)(1,2)(1,2,3)^{-1} = (1,2,3)(1,2)(1,3,2) = (2,3) \notin \langle(1,2)\rangle.$$

Упражнение 1. Найдите явно разбиение группы S_3 на левые и правые смежные классы по подгруппе $\langle(1,2)\rangle$.

Определение 2. Пусть H – нормальная подгруппа в группе G. Факторгруппа G/H – это множество (левых, они же правые) смежных классов по подгруппе H с операцией

$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H.$$

Определение умножения в факторгруппе требует проверки корректности, то есть проверки того, что результат умножения не зависит от выбора представителей в смежных классах. Потенциальная проблема содержится в том, что $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$, но при этом смежный класс g_1g_2H может не совпадать с $g_1'g_2'H$. Тогда умножение называется некорректным.

Предложение 1. *Пусть G – группа, H – подгруппа. Тогда умножение на множестве левых смежных классов корректно тогда и только тогда, когда H нормальна.*

Доказательство. Пусть H нормальна и $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$. Получаем, что $g_1'^{-1}g_1 \in H$ и $g_2'^{-1}g_2 \in H$. Обозначим $g_1'^{-1}g_1$ через h. Имеем

$$(g_1'g_2')^{-1}(g_1g_2) = g_2'^{-1}g_1'^{-1}g_1g_2 = g_2'^{-1}hg_2 \in H$$

Это означает, что g_1g_2H совпадает с $g_1'g_2'H$. Значит, умножение корректно.

Пусть теперь H не нормальна. Тогда найдутся $g \in G$ и $h \in H$ такие, что $ghg^{-1} \notin H$. Тогда $gH = (gh)H$. Рассмотрим следующие смежные классы: $gH = (gh)H$ и $g^{-1}H$.

Имеем $gH \cdot g^{-1}H = H$, но $(gh)H \cdot g^{-1}H = (ghg^{-1})H \neq H$. Значит, умножение не корректно. $\square$

Легко видеть, что G/H действительно группа. Ассоциативность произведения следует из ассоциативности произведения в G, единичный элемент – это $eH = H$, обратный к gH элемент – это $g^{-1}H$. Из теоремы Лагранжа следует, что если G – конечная группа, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

Пример 4. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Подгруппа $n\mathbb{Z}$ нормальна, так как группа $\mathbb{Z}$ абелева. Смежные классы имеют вид $k+n\mathbb{Z}$. При этом $k+n\mathbb{Z} = l+\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда k и l имеют одинаковые остатки при делении на n. Сопоставим смежному классу $k+n\mathbb{Z}$ остаток при делении k на n. Докажем, что это сопоставление – это изоморфизм ψ между $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$. Действительно, сложению смежных классов соответствует сложение остатков. Кроме того ψ сюрътективно, так как любой остаток – это остаток некоторого числа k, а значит, он равен $\psi(k+n\mathbb{Z})$. Для проверки инъективности ψ, воспользуемся критерием инъективности. Ядро ψ – это то, что переходит в остаток ноль, то есть смежный класс $n\mathbb{Z}$, который является нейтральным элементом фактор-группы.*

Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм групп.

Лемма 2. *Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа в группе G.*

Доказательство. То, что ядро – подгруппа уже было доказано ранее. Докажем, что подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G$ нормальна. Пусть $g \in G$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e.$$

Значит, $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа. $\square$

Определение 3. Рассмотрим следующее отображение $\pi_H\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Из определения операции в факторгруппе следует, что π_H – гомоморфизм. Легко видеть, что он сюръективен. Гомоморфизм π_H называется *каноническим гомоморфизмом.*

Для канонического гомоморфизма ядро – это нормальная подгруппа H, а образ – факторгруппа G/H. Следующая теорема показывает, что ситуация аналогична для любого гомоморфизма.

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Psi\colon G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, \qquad \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g).$$

Сперва нам надо проверить корректность отображения Ψ, то есть то, что оно не зависит от выбора представителя g из смежного класса. Для этого заметим, что если $g\operatorname{Ker}\varphi = g'\operatorname{Ker}\varphi$, то $g'^{-1}g = h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $g = g'h$. Получаем $\varphi(g) = \varphi(g'h) = \varphi(g')\varphi(h) = \varphi(g')e = \varphi(g')$. Таким образом, отображение Ψопределено корректно.

Докажем, что Ψ – изоморфизм. То, что Ψ –гомоморфизм следует из равенства:

$$\Psi((g\operatorname{Ker}\varphi)(f\operatorname{Ker}\varphi)) = \Psi(gf\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi)\Psi(f\operatorname{Ker}\varphi).$$

Инъективность Ψ проверим по критерию инъективности. Если $g\operatorname{Ker}\varphi \in \operatorname{Ker}\Psi$, то $\Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g) = e$. Значит, $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть $g\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ – единица фактор-группы. Сюръективность Ψ очевидна, так как для любого элемента $\varphi(g)$ в $\operatorname{Im}\varphi$ в него отображается смежный класс $g\operatorname{Ker}\varphi$. $\square$

Следствие 1. *Если $|G| < \infty$ и $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм, то*
$$|\operatorname{Ker}\varphi| \cdot |\operatorname{Im}\varphi| = |G|.$$

Пример 5. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ по теореме о гомоморффизме. Для того, чтобы применить теорему о гомоморфизме, нам нужно построить гомоморфизм $\varphi\colon Z \to G'$ для некторой группы G' такой, что $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$. Легко видеть, что подходит следующий гомоморфизм*
$$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \qquad k \mapsto k \pmod n$$
Действительно, φ – гомоморфизм, $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$ и φ – сюрьекция, то есть $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}_n$. По теореме о гомоморфизме $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Определение 4. Центр группы G – это множество $Z(G)$ элементов, коммутирующих со всеми элементами группы. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$.

Лемма 3. *Центр – это нормальная подгруппа G.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in Z(G)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено
$$z_1 z_2 g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2.$$
Значит, $Z(G)$ – замкнутое относительно операции подмножество. Для доказательства замкнутости относительно взятия обратного заметим, что если $z \in Z(G)$, то для любого $g \in G$ выполнено $zg^{-1} = g^{-1}z$. Тогда
$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}.$$
Кроме того $Z(G) \neq \varnothing$, так как $e \in Z(G)$.

То, что подгруппа $Z(G)$ нормальна следует из равенства $gzg^{-1} = z \in Z(G)$. □

Предложение 2. *Факторгруппа группы G по центру изоморфна группе внутренних атоморфизмов $\operatorname{Inn}(G)$.*

Доказательство. Докажем, что отображение $\Psi\colon G \to \operatorname{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ является гомоморфизмом. В самом деле
$$\Psi(g_1g_2)(h) = \varphi_{g_1g_2}(h) = (g_1g_2)h(g_1g_2)^1 = g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} = \\ = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(h) = \Psi(g_1) \circ \Psi(g_2)(h).$$
Таким образом $\Psi(g_1g_2) = \Psi(g_1) \circ \Psi(g_2)$. По определению внутренних автоморфизмов гомоморфизм Ψ сюрьективен. Ядро Ψ состоит из тех элементов $g \in G$, для которых $\varphi_g = \mathrm{id}$, то есть $\forall h \in G$ выполнено $ghg^{-1} = h$. Это означает $g \in Z(G)$. Итак, $\operatorname{Ker}\varphi = Z(G)$, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Inn}(G)$. По теореме о гомоморфизме $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$. □