Лекция 5

Предложение 1. *Если группа G не коммутативна, то группа $G/Z(G)$ не является циклической.*

Доказательство. Предположим, что $G/Z(G) = \langle aZ(G)\rangle$, $a \in G$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $g \in a^k Z(G)$, то есть $g = a^k z$, где $z \in Z(G)$. Возьмем $g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 = a^k z_1$, $g_2 = a^m z_2$. Имеем

$$g_1 g_2 = a^k z_1 a^m z_2 = a^{k+m} z_1 z_2 = a^{k+m} z_2 z_1 = a^m z_2 a^k z_1 = g_2 g_1.$$

Таким образом, G коммутативна. (И следовательно, $G/Z(G) \cong \{e\}$.) □

Определение 1. Пусть группа G содержит подмножество S. *Подгруппой, порожденной подмножеством* S, называется минимальная подгруппа, содержащая S. Обозначается эта подгруппа $\langle S\rangle$. Если $G = \langle S\rangle$, то S называется *множеством порождающих (образующих) группы* G.

Лемма 1. *Пусть S – подмножество в группе G. Тогда подгруппа $\langle S\rangle$, порождчнная S, совпадает с множеством конечных произведений элементов из S и обратных к ним, то есть*

$$\langle S\rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} \mid s_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Обозначим $P = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} \mid s_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$. Нам надо доказать, что $P = \langle S\rangle$. Сперва скажем, что $P \subseteq \langle S\rangle$. В самом деле так как $s_i \in S \subseteq \langle S\rangle$ и $\langle S\rangle$ – подгруппа, выходит, что $s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} \in \langle S\rangle$.

Обратно. Легко видеть, что множество P замкнуто относительно произведения и взятия обратного. Кроме того в нем лежит $ss^{-1} = e$. Значит, это подгруппа, содержащая S, и следовательно, она содержит $\langle S\rangle$. □

Упражнение 1. Докажите, что
а) $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle$,
б) $S_n = \langle (1,2), (2,3) \dots, (n-1, n)\rangle = \langle (1,2), (1,2,\dots,n)\rangle$,
в) $A_n = \langle (1,2,3), (1,2,4), \dots, (1,2,n)\rangle$.

Пример 1. *Построим сюръективный гомоморфизм $S_4 \to S_3$. Рассмотрим 4 переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и три многочлена от этих переменных:*

$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad f_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \qquad f_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Если применить к x_1, x_2, x_3, x_4 перестановку σ, то f_i переставятся между собой по перестановке $\tau(\sigma)$. Ясно, что $\tau(\sigma \circ \delta) = \tau(\sigma) \circ \tau(\delta)$, то есть τ – гомоморфизм $S_4 \to S_3$.

Заметим, что $\tau(2,3) = (1,2)$, значит, $(1,2) \in \operatorname{Im} \tau$. Аналогично можно проверить, что все транспозиции лежат в образе τ. Поскольку S_3 порождается транспозициями, гомоморфизм τ сюръективен. Легко видеть, что $V_4 \subset \operatorname{Ker} \varphi$. С другой стороны $|\operatorname{Ker} \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \varphi = V_4$.

По теореме о гомоморфизме получаем следующий изоморфизм:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Лемма 2. *Пусть G – группа, $H \lhd G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа. Тогда $\langle K \cup H\rangle = KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$.*

Доказательство. Докажем, что KH замкнуто относительно умножения. Действительно,

$$(k_1h_1)(k_2h_2) = k_1k_2k_2^{-1}h_1k_2h_2 = k_1k_2(k_2^{-1}h_1k_2)h_2 = k_1k_2\widehat{h}h_2 \in KH.$$

Теперь докажем, что KH замкнуто относительно взятия обратного:

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = k^{-1}kh^{-1}k^{-1} = k^{-1}(kh^{-1}k^{-1}) = k^{-1}\widetilde{h} \in KH.$$

Поскольку KH не пусто, это группа. Очевидно, что KH – наименьшая подгруппа, содержащая K и H. $\square$

Теорему о гомоморфизме мы также будем называть первой теоремой об изоморфизме (это название гораздо менее общепринятно). Мы докажем два следствия из теоремы о гомоморфизме, которые назовчм второй и третьей теоремами об изоморфизме.

Теорема 1. *(Вторая теорема об изоморфизме) Пусть G – группа, $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа.*

1) $H \cap K$ – нормальная подгруппа в K и H – нормальная подгруппа в KH,

2) $KH/H \cong K/(H \cap K)$.

Доказательство. 1) Пусть $a \in H \cap K$, $k \in K$. Тогда $a \in H \Rightarrow kak^{-1} \in H$. С другой стороны $a \in K \Rightarrow kak^{-1} \in K$. То есть $kak^{-1} \in H \cap K$. То есть $(H \cap K) \triangleleft K$.

Пусть $h \in H, g \in KH$, тогда, так как $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$. Значит, $H \triangleleft KH$.

2) Рассмотрим $\Psi\colon K \to (KH)/H$, $k \mapsto kH$. Докажем, что Ψ – сюръекция. Действительно, пусть $khH \in (KH)/H$. Тогда $khH = kH = \Psi(k)$. Легко видеть, что Ψ – гомоморфизм. Найдем ядро Ψ. Пусть $k \in \operatorname{Ker}\Psi$, тогда $kH = H$. Это значит, что $k \in H$. С другой стороны $k \in K$. То есть $k \in (H \cap K)$. Итак, $\operatorname{Ker}\Psi = H \cap K$. По теореме о гомоморфизме $K/(H \cap K) \cong KH/H$. $\square$

Теорема 2. *(Третья теорема об изоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – сюрьективный гомоморфизм, $K = \operatorname{Ker}\varphi$, $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ –подгруппа. Пусть $H = \varphi^{-1}(\widetilde{H})$ – полный прообраз. Тогда*

1) $\widetilde{H} \leftrightarrow H$ – биекция между подгруппами в $\widetilde{G}$ и подгруппами в G, содержащими K.

2) Подгруппа H нормальна в G тогда и только тогда, когда $\widetilde{H}$ нормальна в $\widetilde{G}$.

3) Если H и $\widetilde{H}$ нормальны, то $G/H \cong \widetilde{G}/\widetilde{H}$.

Доказательство. 1) Для подгруппы $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ обозначим через $\Omega(\widetilde{H}) = H$ подгруппу $\varphi^{-1}(\widetilde{H}) \subset G$. Легко видеть, что $\Omega(\widetilde{H})$ содержит $K = \varphi^{-1}(e)$. Пусть H – подгруппа G, содержащая K, обозначим через $\Theta(H)$ образ $\varphi(H)$, это подгруппа в $\widetilde{G}$. Докажем, что Ω и Θ – взаимно обратные отображения. Для этого надо проверить, что $\Omega \circ \Theta = \mathrm{id}$ и $\Theta \circ \Omega = \mathrm{id}$. Действительно, $\Theta \circ \Omega(\widetilde{H})$ – это образ от полного прообраза $\widetilde{H}$, то есть $\widetilde{H}$. Теперь рассмотрим $\Omega \circ \Theta(H)$ – полный прообраз от образа H. Очевидно, что $H \subset \Omega \circ \Theta(H)$. Пусть $g \in \Omega \circ \Theta(H)$, тогда $\varphi(g) \in \Theta(H)$. Следовательно, есть $h \in H$ такое, что $\varphi(h) = \varphi(g)$. Тогда $\varphi(h^{-1}g) = e$, то есть $h^{-1}g \in K$. Значит $g = hk \in H$. Итак, $\Omega \circ \Theta(H) = H$.

2) Пусть $G \triangleright H$. Рассмотрим $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Так как гомоморфизм φ сюръективный, найдутся $h \in H$ и $g \in G$ такие, что $\varphi(h) = \widetilde{h}$, $\varphi(g) = \widetilde{g}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, а значит, $\widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{g}^{-1} = \varphi(ghg^{-1}) \in \widetilde{H}$. Таким образом, $\widetilde{H} \triangleleft \widetilde{G}$.

Пусть теперь $\widetilde{H} \triangleleft \widetilde{G}$. Рассмотрим $g \in G$, $h \in H$. Тогда $\varphi(g) \in \widetilde{G}$, $\varphi(h) \in \widetilde{H}$, а значит, $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in \widetilde{H}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, то есть $G \triangleright H$.

3) Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\Psi = \pi_{\widetilde{H}} \circ \varphi\colon G \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$. Так как φ и $\pi_{\widetilde{H}}$ – сюръекции, Ψ – также сюръекция. Заметим, что $\Psi(g) = e\widetilde{H}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g) \in \widetilde{H}$, то есть $g \in H$. Получаем, что $\operatorname{Ker}\Psi = H$. По теореме о гомоморфизме получаем $G/H \cong \widetilde{G}/\widetilde{H}$. $\square$