Лекция 6

Следствие 1 (Следствие из третьей теоремы о гомоморфизме)**.** *Пусть H и N – две нормальные подгруппы группы G, причем $N \subset H$. Пусть $\pi_N \colon G \to G/N$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi_N(H) \cong H/N$ – нормальная подгруппа в G/N и*

$$(G/N)/\pi_N(H) \cong G/H.$$

Менее формально можно написать

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

Доказательство. Гомоморфизм $\pi_N \colon G \to G/N$ сюръективен. Значит, мы находимся в условиях третьей теоремы о гомоморфизме. Поскольку H – нормальная подгруппа в G, $\pi_N(H)$ – также нормальная подгруппа в G/N. Так как $\operatorname{Ker} \pi_N = N$, $\pi_N(H) \cong H/N$. По пункту 3) третьей теоремы о гомоморфизме

$$G/H \cong (G/N)/\pi_N(H).$$

□

По сути переформулировкой данного следствия является следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $\varphi \colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм. И пусть N – нормальная подгруппа в G. Тогда существует гомоморфизм $\xi \colon G/N \to \widetilde{G}$ такой, что $\varphi = \xi \circ \pi_N$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi \supseteq N$.*

Доказательство. Мы можем заменить $\widetilde{G}$ на образ φ и считать, что гомоморфизм φ сюръективен. Тогда $\widetilde{G} = \operatorname{Im} \varphi \cong G/\operatorname{Ker} \varphi$. Если $\operatorname{Ker} \varphi \supseteq N$, то мы находимся в условии предыдущего следствия имея в виду соответствие $H = \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда по следствию выполнено $\widetilde{G} \cong G/\operatorname{Ker} \varphi \cong (G/N)/\pi_N(\operatorname{Ker} \varphi)$. Обозначим изоморфизм $(G/N)/\pi_N(\operatorname{Ker} \varphi) \to \widetilde{G}$ через α. Тогда обозначим через ξ композицию канонического гомоморфизма $(G/N) \to (G/N)/\pi_N(\operatorname{Ker} \varphi)$ и α. □

Пример 1. *Рассмотрим нормальные подгруппы $V_4 \subset A_4$ в S_4. По предыдущему следствию получаем $S_4/A_4 \cong (S_4/V_4)(A_4/V_4)$. В самом деле, $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $S_4/V_4 \cong S_3$ (см. пример из прошлой лекции), $|A_4/V_4| = 3$, а значит, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$. При этом $\pi_{V_4}(A_4) \cong \mathbb{Z}_3$ – подгруппа в S_3, следовательно, $\pi_{V_4}(A_4) = A_3$. И мы получаем, что*

$$(S_4/V_4)(A_4/V_4) \cong S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2.$$

Пусть S – некоторое множество. Рассмотрим множество конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1}, где $s \in S$. (Так как на множестве S нет никакой операции, то s^{-1} – некий формальный символ. Мы считаем, что множества S и S^{-1} не пересекаются.) Также мы рассматриваем пустое слово $\varnothing$. Два слова назовем *эквивалентными*, если одно переводится в другое некой конечной цепочкой следующих элементарных преобразований:

1) Если в некотором месте есть пара подряд идущих букв ss^{-1} или $s^{-1}s$, то их можно убрать.

2) В любое место можно вписать пару ss^{-1} или $s^{-1}s$.

Конкатенацией двух слов называется операция приписывания одного слова к другому. Например, $(xyx^{-1})(xzzx) = xyx^{-1}xzzx$.

Лемма 1. *Класс эквивалентности конкатенации слов из двух классов эквивалентности не зависит от выбора представителей в этих классах.*

Доказательство. Пусть слово A эквивалентно слову B, а слово C эквивалентно слову D. Наша задача доказать, что слова AC и BD эквивалентны. Заметим, что мы можем делать с левой частью слова AC те же элементарные преобразования, что и со словом A и получим слово BC. Затем будем делать с правой частью BC те же элементарные преобразования, что и с C. Получим BD. $\square$

Определение 1. *Свободной группой с множеством порождающих S* называется множество классов эквивалентности конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1}, где $s \in S$ с операцией конкатенации. Обозначать эту группу мы будем $\mathfrak{F}(S)$.

Мощность $|S|$ называется *рангом* свободной группы $\mathfrak{F}(S)$.

Замечание 1. Легко видеть, что свободная группа действительно является группой. Ассоциативность конкатенации очевидна. Нейтральный элемент – класс пустого слова. Обратный элемент к каждому слову легко выписать.

Теорема 1. *Пусть G группа с порождающими $g_1, \dots, g_k$. Существует единственный гомоморфизм из свободной группы $\mathfrak{F}(x_1, \dots, x_k)$ ранга k в группу G такой, что $\varphi(x_i) = g_i$. Гомоморфизм φ сюръективен.*

Доказательство. Пусть φ переводит класс слова $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_m}^{\varepsilon_m} \in G.$$

Чтобы проверить корректность определения, нужно доказать, что g не зависит от выбора представителя в классе. Если два слова отличаются элементарным преобразованием, то в одном из них есть "дополнительное" $x_i x_i^{-1}$, которое переходит в $g_i g_i^{-1} = e$. Это не меняет образ. То, что φ – гомоморфизм и $\varphi(x_i) = g_i$ очевидно. Сюръективность следует из того, что G порождается $g_1, \dots, g_k$. $\square$

Определение 2. Пусть M – некоторое подмножество группы G. Нормальное замыкание M – это наименьшая по включению нормальная $N(M)$ в G подгруппа, содержащая M.

Легко видеть, что пересечение нормальных подгрупп – это нормальная подгруппа. Из этого следует, что наименьшая нормальная подгруппа, содержащая M существует.

Лемма 2. *Подгруппа $N(M)$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами gmg^{-1} для всех $m \in M, g \in G$.*

Доказательство. Поскольку $N(M)$ – нормальная подгруппа и $M \subset N(M)$, получаем $gmg^{-1} \in N(M)$, а значит, $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M \rangle \subset N(M)$. С другой стороны $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M \rangle$ – это нормальная подгруппа. В самом деле, $(gmg^{-1})^{-1} = gm^{-1}g^{-1}$. А значит, любой элемент $\langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M \rangle$ имеет вид

$$(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1}) \qquad \varepsilon_j = \pm 1.$$

При этом

$$g(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1}) g^{-1} = \\ = (g g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g^{-1})(g g_2 m_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} g^{-1}) \dots (g g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1} g^{-1}) \in \langle gmg^{-1} \mid g \in G, m \in M \rangle.$$

$\square$

Определение 3. Говорят, что группа G задана образующими $g_1, \ldots, g_k$ и соотношениями $g_1^{\alpha_1} \ldots g_k^{\alpha_k}, \ldots, g_1^{\beta_1} \ldots g_k^{\beta_k}$, если для гомоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_k) \to G$, $x_i \mapsto g_i$ ядро совпадает с $N(x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}, \ldots, x_1^{\beta_1} \ldots x_k^{\beta_k})$. Тогда

$$G \cong \mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_k)/N(x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}, \ldots, x_1^{\beta_1} \ldots x_k^{\beta_k}).$$

В таком случае пишут

$$G = \langle g_1, \ldots, g_k \mid g_1^{\alpha_1} \ldots g_k^{\alpha_k}, \ldots, g_1^{\beta_1} \ldots g_k^{\beta_k} \rangle.$$