

## ЛЕКЦИЯ 2

**Определение 1.** Гомоморфизм  $R$ -модулей  $\varphi: M \rightarrow N$  – это гомоморфизм абелевых групп такой, что для любых  $r \in R$  и  $m \in M$  выполнено

$$\varphi(rm) = r\varphi(m).$$

**Упражнение 1.** Покажите, что ядро и образ гомоморфизма – подмодули.

**Определение 2.** Пусть  $M$  и  $N$  – модули над  $R$ . Прямая сумма этих модулей – это прямая сумма абелевых групп

$$M \oplus N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

с операцией  $r(m, n) = (rm, rn)$ .

Существуют естественные вложения модулей  $\iota_1: M \hookrightarrow M \oplus N, m \mapsto (m, 0)$  и  $\iota_2: N \hookrightarrow M \oplus N, n \mapsto (0, n)$ , а также проекции  $\pi_1: M \oplus N \rightarrow M, \pi_1((m, n)) = m$  и  $\pi_2: M \oplus N \rightarrow N, \pi_2((m, n)) = n$ .

**Лемма 1.** Подмодуль  $M$  модуля  $P$  является прямым слагаемым (то есть существует дополнительный подмодуль  $N$  такой, что  $P \cong M \oplus N$ ) тогда и только тогда, когда существуют гомоморфизмы  $\alpha: M \rightarrow P$  и  $\sigma: P \rightarrow M$  такие, что  $\sigma \circ \alpha = \text{id}_M$ .

*Доказательство.* Если  $P = M \oplus N$ , то можно взять  $\alpha = \iota_1$  и  $\sigma = \pi_1$ .

Наоборот, пусть существуют  $\alpha$  и  $\sigma$ . Докажем, что  $P \cong M \oplus \text{Ker } \sigma$ . Для этого построим гомоморфизм  $\psi: P \rightarrow \text{Ker } \sigma, \psi(p) = (\sigma(p), p - \alpha \circ \sigma(p))$ . Проверим, что  $p - \alpha \circ \sigma(p) \in \text{Ker } \sigma$ . В самом деле,

$$\sigma(p - \alpha \circ \sigma(p)) = \sigma(p) - \sigma \circ \alpha \circ \sigma(p) = \sigma(p) - \sigma(p) = 0.$$

То, что  $\psi$  – гомоморфизм легко следует из того, что  $\alpha$  и  $\sigma$  – гомоморфизмы. Осталось показать биективность. Для инъективности нужно доказать, что  $\text{Ker } \psi = \{0\}$ . Допустим, что  $\psi(p) = 0$ . Тогда  $\sigma(p) = 0$ , следовательно,  $\alpha \circ \sigma(p) = 0$ . С другой стороны  $p - \alpha \circ \sigma(p) = 0$ . Отсюда  $p = 0$ . Докажем сюръективность  $\psi$ . Пусть  $m \in M$  и  $n \in \text{Ker } \sigma$ . Рассмотрим  $\alpha(m) + n \in P$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi(\alpha(m) + n) &= (\sigma(\alpha(m) + n), \alpha(m) + n - \alpha \circ \sigma(\alpha(m) + n)) = \\ &= (m + \sigma(n), \alpha(m) + n - \alpha(m) - \alpha \circ \sigma(n)) = (m, n). \end{aligned}$$

Итак,  $\psi$  – изоморфизм модулей. □

**Определение 3.** Свободный  $R$ -модуль – это модуль, изоморфный прямой сумме нескольких модулей  $R$ . Если слагаемых  $n$ , то обозначаем свободный  $R$ -модуль через  $R^n$ . Число  $n$  мы называем рангом свободного модуля.

Базисом  $R$ -модуля  $M$  называется набор  $\{m_\alpha \in M \mid \alpha \in S\}$  такой, что

- 1) из  $\sum_{j=1}^k r_j m_{\alpha_j} = 0$  следует  $r_j = 0$  для всех  $j$ ;
- 2) для любого  $m \in M$  найдутся  $r_1, \dots, r_k$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  такие, что  $m = \sum_{j=1}^k r_j m_{\alpha_j}$ .

**Упражнение 2.** Докажите, что модуль свободный тогда и только тогда, когда у него есть базис.

**Пример 1.** Свободные  $\mathbb{Z}$ -модули – это в точности свободные абелевы группы.

Доказательство следующей леммы будет у нас в курсе позже.

**Лемма 2.** Ранг свободного  $R$ -модуля определён однозначно.

**Определение 4.** Пусть  $M$ ,  $N$  и  $K$  –  $R$ -модули. Тогда последовательность гомоморфизмов  $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K$  называется *точной*, если образ  $\alpha$  совпадает с ядром  $\beta$ .

Будем говорить, что длинная цепочка гомоморфизмов

$$\dots \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow \dots$$

точна в члене  $N$ , если  $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$ .

Короткая точная последовательность – это последовательность

$$(1) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$$

точная в каждом члене.

**Определение 5.** Короткая точная последовательность (1) *расщепляется* если  $N = \text{Ker } \beta \oplus P \cong M \oplus N$ .

**Лемма 3.** Следующие условия эквивалентны:

- 1) короткая точная последовательность (1) расщепляется;
- 2) существует гомоморфизм  $\tau: K \rightarrow N$  такой, что  $\beta \circ \tau = \text{id}_K$ ;
- 3) существует гомоморфизм  $\zeta: N \rightarrow M$  такой, что  $\zeta \circ \alpha = \text{id}_M$ .

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$ . Мы знаем, что  $N = \text{Ker } \beta \oplus P$ . Поскольку  $\beta$  – сюръекция, для любого  $k \in K$  существует  $n \in N$  такой, что  $\beta(n) = k$ . Значит, найдётся такой  $p \in P$ , что  $\beta(p) = k$ . Более того, такой  $p$  единственный, так как иначе их разность лежала бы в  $\text{Ker } \beta$ . Определим  $\tau: K \rightarrow P$ ,  $\tau(k) = p$ . Легко видеть, что  $\tau$  – гомоморфизм. При этом  $\beta(\tau(k)) = \beta(p) = k$ , то есть  $\beta \circ \tau = \text{id}_K$ .

$2 \Rightarrow 1$ . По лемме 1,  $N \cong K \oplus \text{Ker } \beta$  тогда и только тогда, когда выполнено условие 2).

$1 \Leftrightarrow 3$ .  $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$  – подмодуль в  $N$ . Он выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда выполняется условие 1).  $\square$

**Теорема Гильберта о базисе.** Вернёмся к изучению колец. Очень важным свойством является нётеровость кольца. Источником нётеровых колец служат, например, кольца главных идеалов. Однако, класс нётеровых колец гораздо шире. Докажем следующую теорему.

**Теорема 1** (Теорема Гильберта о базисе (идеала)). *Кольцо многочленов от одной переменной над нётеровым кольцом нётерово.*

*Доказательство.* Пусть  $R$  – нётерово кольцо. Нам необходимо доказать, что кольцо  $R[x]$  также нётерово.

Пусть  $I$  – некоторый идеал в  $R[x]$ . Наша цель – показать, что этот идеал конечно порождён.

Рассмотрим  $J$  – множество старших коэффициентов многочленов из  $I$  с добавленным нулём. То есть если  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in I$ , то  $a_n \in J$ . Аналогично через  $J_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  мы обозначим множество старших коэффициентов многочленов степени  $n$  из  $I$  с добавленным нулём. Докажем, что  $J_n$  – идеал в  $R$ . В самом деле, если  $a$  и  $b$  лежат в  $J_n$ , то существуют многочлены  $f = ax^n + \dots$  и  $g = bx^n + \dots$  в  $I$ . Тогда  $f + g = (a + b)x^n + \dots \in I$ . Следовательно,  $a + b \in J_n$ . Также для  $r \in R$  получаем  $rf = rax^n + \dots \in I$ , значит,  $ra \in J_n$ .

Итак, мы проверили, что  $J_n$  – идеал в  $R$ . Кроме того легко видеть, что  $J_n \subseteq J_{n+1}$ . В самом деле, если  $a \in J_n$ , то  $f = ax^n + \dots \in I$ . Но тогда  $xf = ax^{n+1} + \dots \in I$ . Значит,  $a \in J_{n+1}$ . Имеем следующую цепочку вложенных идеалов в  $R$ :

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$$

Поскольку данная цепочка должна стабилизироваться, существует  $m$  такое, что

$$J_m = J = \cup_{i=0}^{\infty} J_i.$$

Рассмотрим  $a_{i1} \dots, a_{in_i}$  – образующие  $J_i$ . И пусть  $f_{i1} \dots, f_{in_i}$  – многочлены степени  $i$  со старшими коэффициентами  $a_{i1} \dots, a_{in_i}$  соответственно. Докажем, что идеал  $I$  порождается элементами

$$f_{ik}, 0 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n_i.$$

В самом деле, пусть  $\mathcal{I}$  – идеал порождённый данными многочленами. Так как  $f_{ik} \in I$ , имеем  $\mathcal{I} \subseteq I$ . Возьмём произвольный элемент  $f \in I$ . Будем вычитать из него элементы из  $\mathcal{I}$  пока не получим ноль. Если это получится, то в итоге получим, что  $f \in \mathcal{I}$  и, следовательно,  $\mathcal{I} = I$ .

Если  $\deg f = d \geq m$ , то  $f = ax^d + \dots$ , где  $a \in J_m$ , то есть

$$a = r_1 a_{m1} + \dots + r_{n_m} a_{mn_m}.$$

Рассмотрим

$$g = f - (r_1 f_{m1} + \dots + r_{n_m} f_{mn_m}) x^{d-m}.$$

Имеем,  $\deg g < \deg f$  и  $f - g \in \mathcal{I}$ . То есть мы можем уменьшить степень  $f$  вычитанием элемента из  $\mathcal{I}$ .

Пусть теперь  $\deg f = d < m$ . Тогда  $f = ax^d + \dots$ , где  $a \in J_d$ , то есть

$$a = r_1 a_{d1} + \dots + r_{n_d} a_{dn_d}.$$

Рассмотрим

$$g = f - r_1 f_{d1} + \dots + r_{n_d} f_{dn_d}.$$

Имеем,  $\deg g < \deg f$  и  $f - g \in \mathcal{I}$ .

Итак, идеал  $I$  конечнопорождён, а следовательно, кольцо  $R[x]$  нётерово.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $R$  – нётерово кольцо. Тогда кольцо  $R[x_1, \dots, x_n]$  нётерово.

*Доказательство.* Прибавляя по одной переменной многократно применяем предыдущую теорему.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $F$  – поле. Тогда кольцо  $F[x_1, \dots, x_n]$  нётерово.

**Задача 1.** Докажите, что если  $R$  – нётерово кольцо и  $I$  – идеал в  $R$ , то  $R/I$  – нётерово кольцо.

**Следствие 3.** Пусть  $F$  – поле. Тогда кольцо  $F[x_1, \dots, x_n]/I$  нётерово.

**Аффинные алгебраические многообразия.** Рассмотрим полиномиальную систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \end{cases}$$

$$f_i \in F[x_1, \dots, x_n].$$

**Определение 6.** *Аффинным алгебраическим многообразием* называется множество решений данной системы.

**Определение 7.** Пусть  $X$  – аффинное алгебраическое многообразие. Обозначим через  $I(X)$  множество всех многочленов из  $F[x_1, \dots, x_n]$ . Будем называть  $I(X)$  *идеалом многообразия  $X$* .

**Определение 8.** Алгебра  $F[X] = F[x_1, \dots, x_n]/I(X)$  называется *алгеброй регулярных функций* на  $X$ .