Лекция 3

Определение 1. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Подмножество $U \subset R$ называется *мультипликативно замкнутым*, если $1 \in U$ и для любых $f, g \in U$ выполнено $fg \in U$.

Определение 2. Пусть M — R-модуль, $U \subset R$ мультипликативно замкнуто. Тогда *локализация* $M[U^{-1}] = U^{-1}M$ – это множество классов эквивалентности пар $\{(m,u)\}_{/\sim}$, где $(m,u) \sim (m',u') \iff \exists v \in U : v(mu' - m'u) = 0$. Данную пары мы будем записывать в виде дроби $\frac{m}{u}$. При этом на множестве таких пар можно ввести сложение и как с дробями и умножение на элемент R (умножаем числитель). Получится R-модуль.

Если взять в качестве модуля M само кольцо, то $R[U^{-1}]$ наделяется естественной структурой кольца. При этом $R \hookrightarrow R[U^{-1}]$, $r \mapsto \frac{r}{1}$.

Пример 1. Пусть X - аффинное алгебраическое многообразие, $p \in X$, $R = F[X]$ (ограничение многочленов на нули системы) и $U = \{f \in R : f(p) \neq 0\}$ – мультипликативно замкнутое множество.

Для простоты считаем $X = \mathbb{A}^1$, $R = F[x]$ - кольцо многочленов от одной переменной. Возьмём $p = 0$. Тогда $U \subset R$ - многочлены, не делящиеся на x.

$$R[U^{-1}] = \left\{ \frac{f}{g} \;\mid\; g(0) \neq 0 \right\}.$$

Пример 2. (Должен признать, что на лекции этот пример был рассказан совершенно не верно.) Пусть $X : \{xy = 0\}$ — пара координатных осей. Пусть $R = F[X]$ – алгебра регулярных функций. Тогда $R = F[x,y]/(xy)$. В самом деле, по определению $F[X] = F[x,y]/I(X)$, где $I(X)$ состоит из всех многочленов обращающихся на X в ноль. При этом ясно, что $(xy) \subseteq I$. С другой стороны, любой многочлен $f(x,y)$ имеет вид $f(x,y) = c + xg(x) + yh(y) + xyl(x,y)$. Если $f \notin (x,y)$, то $c + xg(x) + yh(y) \neq 0$. Тогда

$$f|_X = (c + xg(x) + yh(y))|_X.$$

Легко видеть, что этот многочлен не нулевой как функция на X. (Считаем поле бесконечным, чтобы ненулевой многочлен от одной переменной не мог давать нулевую функцию.) Итак, $I(X) = (xy)$.

Теперь положим $p = (1,0) \in X$. $U = \{f \in F[X] | f(p) \neq 0\}$. Тогда $R[U^{-1}] = \{\frac{f}{u} \mid f \in F[X], u \in U\}/\sim$. Как мы уже видели, $f = c + x\bar{g}(x) + yh(y) = g(x) + yh(y)$. Аналогично, $u = l(x) + ys(y)$, при этом $l(1) \neq 0$. Имеем

$$\frac{f}{u} \sim \frac{f'}{u'} \Leftrightarrow \exists v : v(fu' - f'u) = 0.$$

При этом

$$fu' - f'u = (g(x) + yh(y))(l'(x) + ys'(y)) - (g'(x) + yh'(y))(l(x) + ys(y)).$$

Положим $g' = g$, $h' = 0$, $l' = l$, $s' = 0$. Тогда

$$fu' - f'u = (g(x) + yh(y))l(x) - g(x)(l(x) + ys(y)) = yh(y)l(x) - g(x)ys(y).$$

Заметим, что $x \in U$. При этом $x(fu' - f'u) = xy(h(y)l(x) - g(x)s(y)) = 0$. Значит,

$$\frac{f}{u} \sim \frac{f'}{u'} = \frac{g(x)}{l(x)}.$$

Получаем, что $R[U^{-1}] = F[x][(U \cap F[x])^{-1}]$, то есть локализация в $F[X]$ точке на одной из осей "ничего не знает"о второй оси, а ведёт себя так, как будто жтой второй оси не было. Это отражает тот факт, что локализация зависит только от поведения функции в окрестности данной точки.

Важный частный случай.
Пусть $P-$ простой идеал в R, $R \setminus P = U$ – мультипликативно замнкуто, так как:

$$(ab \in P \implies a \in P \quad \vee \quad b \in P) \implies (a, b \notin P \implies ab \notin P)$$

$R[U^{-1}]$ в этом случае обозначается также R_P – локализация по P

Пусть $\varphi\colon M \to N$ - гомоморфизм $R-$модулей и U - мультипликативно замкнуто в R. Тогда $M[U^{-1}], N[U^{-1}]$ - это $R[U^{-1}]$ над M, N. Определим отображение $\varphi[U^{-1}]\colon M[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$ следующим образом: $\frac{m}{u} \mapsto \frac{\varphi(m)}{u}$

Упражнение 1. $\varphi[U^{-1}]$ - гомоморфизм $R[U^{-1}]-$модулей

Предложение 1. *a)* $I \triangleleft R[U^{-1}] \implies I = (I \cap R)R[U^{-1}]$ *(имется в виду идеал в кольце* $R[U^{-1}]$*). Поэтому* $I \mapsto I \cap R$ *- вложение множества идеалов в* $R[U^{-1}]$ *в множество идеалов в* R *(идеал восстанавливается по формуле выше). Оно сохраняет включение и переводит простые идеалы в простые.*

b) То, что $J \triangleleft R$ *имеет вид* $I \cap R$*, где* $I = JR[U^{-1}]$ *равносильно условию (*$ru \in J \iff r \in I \quad \forall u \in U$*)*

Замечание 1. В частности, $I \mapsto I \cap R$ - биекция между простыми идеалами в $R[U^{-1}]$ и простыми иделами в R , не пересекающимимся с U. Действительно, $J = I \cap R$, если $J \cap U \neq \emptyset$, то $u \in J$ $u = 1 \cdot u \implies 1 \in J$ противоречие. Если же $J \cap U = \emptyset$, то по определению простого идеала имеем: $ru \in J \iff r \in J$ или $u \in J \implies r \in J \implies J = I \cap R$. Докажем, что I – простой. Если это не так, то найдутся $\frac{r_1}{u_1}$ и $\frac{r_2}{u_2}$, не лежащие в I такие, что $\frac{r_1 r_2}{u_1 u_2} \in I$. Но тогда выполнено $r_1, r_2 \notin J$, $r_1 r_2 \in J$. Противоречие с простотой J.

Доказательство предложения 1. **a)** $I \cap R \subset I$, следовательно

$$(I \cap R)R[U^{-1}] \subset I.$$

С другой стороны если $\frac{r}{u} \in I$, то $r = \frac{r}{u}u \in I$. Следовательно, $r \in I \cap R$. Так как $\frac{1}{u} \in R[U^{-1}]$, получаем $\frac{r}{u} \in (I \cap R)R[U^{-1}]$. Итак, $I = (I \cap R)R[U^{-1}]$.

Пересечение сохраняет включение; в силу того, что идеал I может быть восстановлен сохраняются строгие включения.

Если I простой, то $R[U^{-1}]/I$ – область целостности. Так как

$$R/I \cap R \subset R[U^{-1}]/I,$$

получаем $R/I \cap R$ – область целостности. Следовательно, $I \cap R$ - простой.

b): $\implies$
Пусть $J = I \cap R$, тогда $JR[U^{-1}] = I$ по предыдущему пункту. Тогда

$$ru \in J \iff ru \in JR[U^{-1}] \iff r \in JR[U^{-1}] \iff r \in JR[U^{-1}] \cap R = J.$$

$\impliedby$ Покажем, что $J = JR[U^{-1}] \cap R$. Для этого рассмотрим $r = \frac{j}{u} \in JR[U^{-1}] \cap R$. По определению $v \cdot (j - ur) = 0, v \in U$. Имеем: $\quad vur \in J \implies r \in J$. Включение в обратную сторону очевидно.

□

Предложение 2. *Локализация нётерова кольца также является нётеровым кольцом.*

Доказательство. Пусть $I \triangleleft R[U^{-1}]$, тогда $I \cap R = (a_1, \ldots, a_n)$ — конечнопорождённый идеал в R (в силу нётеровости). Следовательно,

$$I = (I \cap R) \cdot R[U^{-1}] = (a_1, \ldots, a_n) \cdot R[U^{-1}].$$

$\square$

Пусть M, N — R-модули. Тогда гомоморфизм R-модулей $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ есть R-модуль с операциями:

$$(\varphi + \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m), \quad (r \cdot \varphi)(m) := r \cdot \varphi(m) = \varphi(rm).$$

Лемма 1. $\operatorname{Hom}_R(R, N) \cong N$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi : \operatorname{Hom}_R(R, N) \to N$, $\Phi(\varphi) = \varphi(1)$. Оно биективно и R-линейно: $\varphi \mapsto n$, где $n = \varphi(1)$, и обратное — $n \mapsto \varphi_n : r \mapsto rn$. $\square$

Упражнение 2. Доказать, что Φ из предыдущей леммы - изоморфизм.

Лемма 2. *Пусть $\alpha : M' \to M$, $\beta : N \to N'$ — гомоморфизмы R-модулей. Тогда отображение*

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M', N'), \quad \varphi \mapsto \beta \circ \varphi \circ \alpha$$

является гомоморфизмом R-модулей.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rrr, bend right, "\psi"'] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r, "\beta"] & N' \end{tikzcd}$$

Доказать лемму выше.

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_i M_i, N\right) \cong \prod_i \operatorname{Hom}_R(M_i, N).$$

Доказательство. Задать гомоморфизм $\varphi\colon \bigoplus_i M_i \to N$ равносильно заданию всех гомоморфизмов $\varphi_i\colon M_i \to N$, которые получаются композицией вложения M_i в $\bigoplus_i M_i$ и φ. $\square$

Пусть $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ — точная последовательность R-модулей ($\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$). Тогда для любого R-модуля M последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M, A) \to \operatorname{Hom}_R(M, B) \to \operatorname{Hom}_R(M, C)$$

точна. То есть $\operatorname{Hom}_R(M, \cdot)$ — *точный слева* функтор.

Доказательство. **Проверка точности в члене** $\mathrm{Hom}_R(M, A)$**.** Надо доказать, что отображение $\mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B)$ является вложением. Напомним, как оно строится. Оно переводит φ в $\alpha \circ \varphi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

Если $\varphi \neq 0$, то найдётся $m \in M$ такой, что $\varphi(m) \neq 0$. Поскольку α – вложение, получаем $\alpha(\varphi(m)) \neq 0$. Значит, $\alpha \circ \varphi 0$. Таким образом отображение $\mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B)$ инъективно.

Задача 1. Проверить точность в члене $\mathrm{Hom}_R(M, B)$.

$\square$