

ЛЕКЦИЯ 4

Теорема 1. Пусть дана точная последовательность R -модулей:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Тогда для любого R -модуля M последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{p} \operatorname{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{q} \operatorname{Hom}_R(M, C)$$

точна.

Доказательство. 1. Точность в $\operatorname{Hom}_R(M, A)$: Докажем, что p — вложение.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, A)$ и $p(\varphi) = 0$. Это означает, что $\alpha \circ \varphi = 0$. Поскольку α — вложение (так как исходная последовательность точна в A), то из $\alpha(\varphi(m)) = 0$ для всех $m \in M$ следует, что $\varphi(m) = 0$ для всех $m \in M$. Следовательно, $\varphi = 0$. Значит, $\operatorname{Ker} p = 0$, и p — вложение.

2. Точность в $\operatorname{Hom}_R(M, B)$: Докажем, что $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$.

($\subseteq$) Пусть $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, A)$, $q \circ p(\varphi) = \beta \circ \alpha \circ \varphi = 0$ так как $\beta \circ \alpha = 0$. Следовательно, $p(\varphi) \in \operatorname{Ker} q$.

($\supseteq$) Пусть теперь $\psi \in \operatorname{Hom}_R(M, B)$, $q(\psi) = 0$, то есть $\beta \circ \psi = 0$. Это означает, что для любого $m \in M$ выполняется $\beta(\psi(m)) = 0$, откуда $\psi(m) \in \operatorname{Ker} \beta$. Из точности исходной последовательности $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$, поэтому $\psi(m) \in \operatorname{Im} \alpha$. Значит, для каждого $m \in M$ существует элемент $a_m \in A$ такой, что $\psi(m) = \alpha(a_m)$.

Определим отображение $\varphi : M \rightarrow A$ по правилу $\varphi(m) = a_m$. Покажем, что φ является R -гомоморфизмом.

i) Поскольку $\psi(m_1) = \alpha(\varphi(m_1))$ и $\psi(m_2) = \alpha(\varphi(m_2))$, то

$$\psi(m_1 + m_2) = \psi(m_1) + \psi(m_2) = \alpha(\varphi(m_1)) + \alpha(\varphi(m_2)) = \alpha(\varphi(m_1) + \varphi(m_2)).$$

Но также $\psi(m_1 + m_2) = \alpha(\varphi(m_1 + m_2))$. Так как α — мономорфизм, то

$$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2).$$

Аналогично для умножения на скаляр.

ii) Для любого $r \in R$ и $m \in M$:

$$\psi(rm) = \alpha(\varphi(rm)), \quad r\psi(m) = r\alpha(\varphi(m)) = \alpha(r\varphi(m)),$$

откуда $\varphi(rm) = r\varphi(m)$.

Следовательно, $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, A)$ и $\alpha \circ \varphi = \psi$, то есть $\psi \in \operatorname{Im} p$. Таким образом, $\operatorname{Ker} q \subseteq \operatorname{Im} p$.

Итого, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$, и последовательность точна в $\operatorname{Hom}_R(M, B)$.

Таким образом, доказано, что последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{p} \operatorname{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{q} \operatorname{Hom}_R(M, C)$$

точна. □

Рассмотрим точную последовательность $\mathbb{Z}$ -модулей:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

где отображение $\cdot 2$ задаётся правилом $x \mapsto 2x$, а проекция $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ — взятием остатка по модулю 2.

Применим $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, -)$ к этой последовательности:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0.$$

$\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$, так как любой гомоморфизм из $\mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}$ должен отправлять элементы порядка 2 в элементы порядка, делящего 2, но в $\mathbb{Z}$ таких элементов нет, кроме 0.

$\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, так как есть два гомоморфизма: нулевой и тождественный.

Таким образом, получаем последовательность:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

которая **не является точной** в последнем члене, так как отображение $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ не сюръективно.

Это показывает, что функтор $\text{Hom}(M, -)$ не всегда сохраняет точность справа.

Теорема 2. Пусть дана точная последовательность R -модулей:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Тогда для любого R -модуля N индуцированная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(C, N) \xrightarrow{p} \text{Hom}_R(B, N) \xrightarrow{q} \text{Hom}_R(A, N)$$

точна.

Задача 1. Докажите предыдущую теорему.

Каждый гомоморфизм $\varphi : R \rightarrow M$ однозначно определяется образом единицы:

$$\varphi : R \rightarrow M, \quad 1 \mapsto m.$$

Таким образом, $\text{Hom}_R(R, M) \cong M$.

Определение 1. Для множества A определим *свободный R -модуль с базисом A* :

$$R^A = \bigoplus_{a \in A} R_a,$$

где $R_a \cong R$ — копия кольца R , соответствующая элементу $a \in A$.

Отображение $R^A \rightarrow M$ — это отображение, задаваемое образами базисных элементов (образы единиц в каждой копии R_a).

Имеем точную последовательность:

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow R^A \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где G — подмодуль соотношений на образах базисных элементов.

Определение 2. Модуль M называется *конечно порождённым*, если существует конечное множество A , такое что $R^A \rightarrow M$ сюръективно, то есть M является фактором свободного модуля конечного ранга.

Определение 3. Пусть M и N — R -модули. Тогда их *тензорное произведение* $M \otimes_R N$ — это R -модуль, вида $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N, m, n \text{ — образующие}\}$ с соотношениями:

$$(am + a'm') \otimes (bn + b'n') = abm \otimes n + a'b'm' \otimes n + ab'm \otimes n' + a'b'n' \otimes m',$$

где $a, a', b, b' \in R$.

В частности, для любого $r \in R$ выполняются равенства:

$$rm \otimes n = m \otimes rn = r(m \otimes n).$$

Лемма 1. $R \otimes_R M = M$.

Доказательство. Отображение $r \otimes m \mapsto rm$ является изоморфизмом R -модулей. Действительно, $a \cdot (1 \otimes m) = a \otimes m = 1 \otimes am$, что согласуется с действием кольца R на M . $\square$

Лемма 2. Для любых гомоморфизмов R -модулей $\alpha : M' \rightarrow M$, $\beta : N' \rightarrow N$ существует единственный гомоморфизм

$$\alpha \otimes \beta : M' \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N,$$

такой что $(\alpha \otimes \beta)(m' \otimes n') = \alpha(m') \otimes \beta(n')$.

Доказательство. Отображение $(m', n') \mapsto \alpha(m') \otimes \beta(n')$ билинейно, так как α, β — гомоморфизмы. Остальное — упражнение. $\square$

Лемма 3. Если $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, то

$$M \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N).$$

Доказательство. Рассмотрим естественные вложения $\iota_i : M_i \hookrightarrow M$ и проекции $\pi_i : M \rightarrow M_i$. По предыдущему свойству получаем гомоморфизмы $\iota_i \otimes \text{id}_N : M_i \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$. По свойству прямой суммы существует единственный гомоморфизм

$$\Phi : \bigoplus_i (M_i \otimes_R N) \longrightarrow M \otimes_R N,$$

такой что $\Phi|_{M_i \otimes_R N} = \iota_i \otimes \text{id}$.

Обратно, любой элемент $m \otimes n \in M \otimes_R N$ можно записать как конечную сумму $\sum_i m_i \otimes n$, где $m_i \in M_i$. Это задаёт обратный гомоморфизм Ψ , и легко проверить, что Φ и Ψ взаимно обратны. $\square$

Лемма 4. Существует естественный изоморфизм

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M, \quad m \otimes n \mapsto n \otimes m.$$

Доказательство. Отображение $(m, n) \mapsto n \otimes m$ билинейно из $M \times N$ в $N \otimes_R M$, следовательно, индуцирует гомоморфизм $\tau : M \otimes_R N \rightarrow N \otimes_R M$. Аналогично получаем $\tau^{-1} : N \otimes_R M \rightarrow M \otimes_R N$, и $\tau \circ \tau^{-1} = \text{id}$, $\tau^{-1} \circ \tau = \text{id}$. Значит, τ — изоморфизм. $\square$

Лемма 5. Если последовательность

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

точна, то последовательность

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \text{id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \text{id}} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

также точна.

Доказательство. 1. Поскольку g сюръективен, для любого $m'' \in M''$ существует $m \in M$ с $g(m) = m''$. Тогда $(g \otimes \text{id})(m \otimes n) = m'' \otimes n$, так что $g \otimes \text{id}$ сюръективен. (В образе лежат все разложимые тензоры.)

2. Покажем, что $\text{Im}(f \otimes \text{id}) = \text{Ker}(g \otimes \text{id})$.

— Так как $g \circ f = 0$, то $(g \otimes \text{id}) \circ (f \otimes \text{id}) = (g \circ f) \otimes \text{id} = 0$, значит $\text{Im}(f \otimes \text{id}) \subseteq \text{Ker}(g \otimes \text{id})$.

— Доказательство включения в другую сторону не совсем элементарно. Однако мы его пропустим. (См. , например, предложение 2.18 в книге Атья-Макдональда.) $\square$

Рассмотрим точную последовательность $\mathbb{Z}$ -модулей:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Применим функтор $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$:

$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$, так как $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong M$ для любого $\mathbb{Z}$ -модуля M . Рассмотрим последовательность после применения тензорного произведения:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cdot 2 \otimes \text{id}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Подставляя изоморфизмы, получаем:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

так как умножение на 2 в $\mathbb{Z}_2$ даёт нулевое отображение ($2 \equiv 0 \pmod{2}$). Последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

не является точной, потому что отображение $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ не инъективно (если рассматривать начало), а также ядро второго отображения — всё $\mathbb{Z}_2$, но образ первого — ноль, так что $\text{Ker} \neq \text{Im}$.

Существуют естественные отображения:

$$A \longrightarrow A \otimes_R B \longleftarrow B,$$

задаваемые правилами $a \mapsto a \otimes 1$, $b \mapsto 1 \otimes b$. Эти отображения являются гомоморфизмами R -алгебр, если A, B — R -алгебры (R -модуль + кольцо).

Для любых гомоморфизмов R -алгебр $\alpha : A \rightarrow C$, $\beta : B \rightarrow C$ существует единственный гомоморфизм

$$\alpha \otimes \beta : A \otimes_R B \longrightarrow C,$$

такой что $(\alpha \otimes \beta)(a \otimes b) = \alpha(a) \cdot \beta(b)$.

Лемма 6. Пусть R — коммутативное кольцо, $U \subseteq R$ — мультипликативная система, M — R -модуль. Тогда имеет место естественный изоморфизм

$$R[U^{-1}] \otimes_R M \cong M[U^{-1}],$$

задаваемый отображением

$$\frac{r}{u} \otimes m \longmapsto \frac{rm}{u}.$$

Доказательство. По свойству тензорного произведения существует единственный гомоморфизм

$$\Phi : R[U^{-1}] \otimes_R M \longrightarrow M[U^{-1}], \quad \Phi \left(\frac{r}{u} \otimes m \right) = \frac{rm}{u}.$$

Построим обратное отображение $\Psi : M[U^{-1}] \rightarrow R[U^{-1}] \otimes_R M$, задаваемое формулой

$$\Psi \left(\frac{m}{u} \right) = \frac{1}{u} \otimes m.$$

Проверим, что Φ и Ψ взаимно обратны:

1. $(\Phi \circ \Psi) \left(\frac{m}{u} \right) = \Phi \left(\frac{1}{u} \otimes m \right) = \frac{1 \cdot m}{u} = \frac{m}{u}.$
2. $(\Psi \circ \Phi) \left(\frac{r}{u} \otimes m \right) = \Psi \left(\frac{rm}{u} \right) = \frac{1}{u} \otimes rm = \frac{r}{u} \otimes m.$

Значит, Φ — изоморфизм.

Корректность определения Ψ : Пусть $\frac{m}{u} = \frac{m'}{u'}$ в $M[U^{-1}]$. Тогда существует $v \in U$ такое, что $(mu' - um')v = 0$, то есть $mu'v = um'v$. Тогда:

$$\frac{1}{vuu'}u'm = \frac{1}{vuu'}um'.$$

Но

$$\frac{1}{vuu'}u'm = \frac{1}{u} \otimes m, \quad \frac{1}{vuu'}um' = \frac{1}{u'} \otimes m'.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{u} \otimes m = \frac{1}{u'} \otimes m',$$

и отображение корректно определено.

Отображение $\Psi : M[U^{-1}] \rightarrow R[U^{-1}] \otimes_R M$, заданное как $\Psi \left(\frac{m}{u} \right) = \frac{1}{u} \otimes m$, является обратным к Φ , и оно также является R -гомоморфизмом, так как

$$\Psi \left(r \cdot \frac{m}{u} \right) = \Psi \left(\frac{rm}{u} \right) = \frac{1}{u} \otimes rm = \frac{r}{u} \otimes m = r \cdot \left(\frac{1}{u} \otimes m \right) = r \cdot \Psi \left(\frac{m}{u} \right).$$

Таким образом, доказано, что $R[U^{-1}] \otimes_R M \cong M[U^{-1}]$. $\square$