Лекция 5

Определение 1. R-модуль N называется *плоским*, если $-\otimes_R N$ (умножение каждого члена тензорно на N, а отображение $\varphi\colon M'\to M$ переводится в $\varphi\otimes\mathrm{id}$) переводит точные последовательности в точные, или, эквивалентно, сохраняет вложения: для любого вложения $M'\hookrightarrow M$ индуцированное отображение

$$M'\otimes_R N\longrightarrow M\otimes_R N$$

также является вложением.

Теорема 1. *Для любого мультипликативно замкнутого подмножества $U\subseteq R$ локализация $R[U^{-1}]$ является плоским R-модулем.*

Доказательство. Рассмотрим вложение R-модулей $\iota\colon M'\hookrightarrow M$. Нужно показать, что отображение

$$\iota\otimes\mathrm{id}\colon M'\otimes_R R[U^{-1}]\longrightarrow M\otimes_R R[U^{-1}]$$

инъективно. Воспользуемся изоморфизмом $M\otimes_R R[U^{-1}]\cong M[U^{-1}]$, при котором элемент $m\otimes\frac{1}{u}$ переходит в $\frac{m}{u}$.

Пусть $\frac{m'}{u}\in M'[U^{-1}]$ лежит в ядре отображения $M'[U^{-1}]\to M[U^{-1}]$. Тогда $\frac{m'}{u}=0$ в $M[U^{-1}]$, то есть существует $v\in U$, такое что $vm'=0$ в M. Но так как $M'\subseteq M$, то $vm'=0$ и в M'. Следовательно, $\frac{m'}{u}=0$ в $M'[U^{-1}]$.

Таким образом, отображение инъективно, и $R[U^{-1}]$ — плоский R-модуль. $\square$

Следствие 1. *Локализация сохраняет конечные пересечения подмодулей: если $M_1,\dots,M_k\subseteq M$ — подмодули, то*

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k}M_j\right)[U^{-1}]=\bigcap_{j=1}^{k}M_j[U^{-1}]\subseteq M[U^{-1}].$$

Доказательство. Заметим, что $\bigcap_j M_j$ является ядром естественного гомоморфизма

$$\varphi\colon M\to\bigoplus_{j=1}^{k}M/M_j,$$

составленного из гомоморфизмов факторизации.

Применим локализацию. По свойству плоскости $R[U^{-1}]$ получаем, что гомоморфизм

$$\overline{\varphi}=\varphi\otimes\mathrm{id}\colon M\otimes R[U^{-1}]\to\bigoplus_{j=1}^{k}M/M_j\otimes R[U^{-1}],$$

то есть

$$\overline{\varphi}\colon M[U^{-1}]\to\left(\bigoplus M/M_j\right)[U^{-1}]$$

имеет ядро $\left(\bigcap M_j\right)[U^{-1}]$.

Однако $\left(\bigoplus M/M_j\right)[U^{-1}]=\bigoplus\left(M/M_j\right)[U^{-1}]$. В самом деле набор из нескольких дробей можно привести к общему знаменателю и представить в виде одной дроби. С другой стороны, $\bigoplus\left(M/M_j\right)[U^{-1}]=\bigoplus M[U^{-1}]/M_j[U^{-1}]$. При этом отображение

$$\overline{\varphi}\colon M[U^{-1}]\to\bigoplus M[U^{-1}]/M_j[U^{-1}]$$

есть естественное отображение, составленное из гомоморфизмов факторизации. Его ядро равно $\bigcap M_j[U^{-1}]$. Получаем $\left(\bigcap M_j\right)[U^{-1}] = \bigcap M_j[U^{-1}]$. □

Определение 2. Пусть M — R-модуль. *Носителем* модуля M называется множество простых идеалов в R таких, что локализация M_P – не нулевой модуль.

$$\operatorname{Supp} M := \{P \triangleleft R : P \text{ – простой},\ M_P \neq 0\}.$$

Лемма 1. *Пусть M — конечнопорождённый R-модуль. Тогда*

$$P \in \operatorname{Supp} M \iff P \supseteq \operatorname{ann}(M).$$

Доказательство. Пусть $m \in M$, тогда $\frac{m}{1} \in M_P$. При этом $\frac{m}{1} = 0$ равносильно существованию $v \in U = R \setminus P$ такого, что $vm = 0$.

То, что локализация M_P – нулевой модуль равносильно тому, что $\frac{m}{1} = 0$ для всех $m \in M$, что означает, что для каждого $m \in M$ найдётся $v_m \in U$ такой, что $v_m m = 0$.

Модуль M конечно порождённый. Возьмём $m_1, \ldots, m_k$ — порождающие M. Если $M_P = 0$, то существуют $v_1, \ldots, v_k \in U$ такие, что $v_i m_i = 0$. Обозначим $v = v_1 \cdots v_k \in U$. Тогда $v \cdot m = v\left(\sum r_i m_i\right) = 0$ для всех $m \in M$. Таким образом, $M_P = 0$ тогда и только тогда, когда существует $v \in U$ с условием $vM = 0$.

Итак,

$$M_P \neq 0 \iff \nexists v \in U : vM = 0 \iff \forall v \in U, v \notin \operatorname{ann}(M) \iff \operatorname{ann}(M) \subseteq P.$$

□

Пример 1. Пусть $F[x] = R$, $M = F[x]/(f)$. Тогда $\operatorname{ann}(M) = (f)$. Рассмотрим разложение f на неприводимые многочлены $f = \prod f_i^{a_i}$. Имеем

$$\operatorname{Supp} M = \{P \triangleleft F[x] : P \supseteq (f)\} = \{(f_i)\}.$$

Лемма 2. *Пусть R — кольцо и N — R-модуль.*
a) $n \in N$. Тогда $n = 0 \iff \frac{n}{1} = 0$ в N_m для всех максимальных идеалов $m \triangleleft R$.
b) $N = 0 \iff N_m = 0$ для всех максимальных идеалов $m \triangleleft R$.

Доказательство. **a)** Пусть $n \in N$. Тогда

$$n = 0 \iff \operatorname{ann}(n) = R.$$

Если $\operatorname{ann}(n) \neq R$, то существует максимальный идеал $m \supseteq \operatorname{ann}(n)$, и тогда $\frac{n}{1} \neq 0$ в N_m, так как для любого $v \in R \setminus m$ выполнено $vn \neq 0$.

b) $N = 0 \iff \forall n \in N,\ n = 0 \iff \forall n \in N,\ \frac{n}{1} = 0$ в N_m для всех максимальных $m \triangleleft R \iff N_m = 0$ для всех таких m.

□

Следствие 2. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм R-модулей. Тогда φ является мономорфизмом (соответственно, эпиморфизмом/изоморфизмом) тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала $m \triangleleft R$ локализация*

$$\varphi_m\colon A_m \to B_m$$

является мономорфизмом (соответственно, эпиморфизмом/изоморфизмом).

Доказательство. Если φ не мономорфизм, то $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$. Рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\varphi} B,$$

где $C = \ker\varphi$, и ι — вложение. Локализация сохраняет точность (так как R_m плоский), поэтому:

$$0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\iota_m} A_m \xrightarrow{\varphi_m} B_m.$$

Тогда φ_m не мономорфизм $\iff C_m \neq 0$.

Но по лемме $C \neq 0$ тогда и только тогда, когда существует максимальный идеал m такой, что $C_m \neq 0$. Следовательно, φ — мономорфизм $\iff \varphi_m$ — мономорфизм для всех максимальных m.

Утверждение для эпиморфизма остаётся в качестве упражнения для слушателей. Утверждение про изоморфизм — это следствие двух предыдущих. □

Пример 2. (Китайская теорема об остатках) Пусть R — кольцо, $Q_1, \dots, Q_n \triangleleft R$ такие, что $Q_i + Q_j = R$ (сумма — минимальный идеал, содержащий оба идеала) для всех $i \neq j$. Тогда

$$R \Big/ \bigcap_{j=1}^{n} Q_j \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/Q_i.$$

Это обобщение Китайской теоремы об остатках. В случае $R = \mathbb{Z}$, положим $Q_i = (k_i)$. Тогда условие $(k_i) + (k_j) = \mathbb{Z}$ эквивалентно НОД$(k_i, k_j) = 1$ для $i \neq j$, то есть k_i попарно взаимно просты.

Тогда утверждение состоит в том, что

$$\mathbb{Z} \Big/ \bigcap_{j=1}^{n} (k_j) = \mathbb{Z} \Big/ (k_1 \cdots k_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/(k_i).$$

Это стандартная формулировка китайской теоремы об остатках: система сравнений по попарно взаимно простым модулям имеет единственное решение по модулю произведения.

Теперь докажем сформулированное утверждение.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon R \to \bigoplus_{i=1}^{n} R/Q_i, \quad r \mapsto (r + Q_1, \dots, r + Q_n).$$

Тогда $\operatorname{Ker}\varphi = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Q_i$, так как $r \in \operatorname{Ker}\varphi \iff r \in Q_i$ для всех i.

Осталось показать, что φ — эпиморфизм. Для любого максимального идеала $m \triangleleft R$ рассмотрим локализацию $\varphi_m\colon R_m \to \bigoplus_{i=1}^{n} (R/Q_i)_m$.

Заметим, что

$$\operatorname{ann}(R/Q_i) = Q_i \not\subseteq m \iff m \not\subseteq \operatorname{Supp}(R/Q_i) \iff (R/Q_i)_m = 0.$$

Если же $Q_i \subseteq m$, то $(R/Q_i)_m = R_m/(Q_i)_m$. Но по условию $Q_i + Q_j = R$ для $i \neq j$, поэтому не более одного идеала Q_i может лежать в m (иначе $Q_i + Q_j \subseteq m \subsetneq R$ — противоречие). Следовательно, для каждого m не более одного слагаемого в прямой сумме является ненулевым, и φ_m — эпиморфизм, так как отображение $R_m \to R_m/Q_i R_m$ — эпиморфизм, а отображение в нулевой модуль – тем более.

Итак, φ_m — эпиморфизм для всех максимальных m, и по предыдущей лемме φ — эпиморфизм. Таким образом, по теореме о гомоморфизме

$$R \Big/ \bigcap_{j=1}^{n} Q_j \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/Q_i.$$

□

Предложение 1. *Пусть $U \subseteq R$ — мультипликативно замкнутое подмножество и $I \triangleleft R$ — идеал, максимальный среди идеалов, не пересекающихся с U. Тогда I — простой идеал.*

Доказательство. Возьмем, $f, g \in R \setminus I$.

Рассмотрим идеал (I, f). Поскольку $f \notin I$, то (I, f) строго содержит I. По максимальности I (среди идеалов, не пересекающихся с U), имеем

$$(I, f) \cap U \neq \varnothing.$$

Значит, существует элемент вида $i + af \in U$, где $i \in I$, $a \in R$.

Аналогично, для g: существует $j + bg \in U$, где $j \in I$, $b \in R$. Теперь перемножим эти два элемента:

$$U \ni (i + af)(j + bg) = ij + ibg + jaf + abfg \notin I.$$

Заметим, что $ij, ibg, jaf \in I$ (так как $i, j \in I$), следовательно $abfg \notin I$. Значит, $fg \notin I$. Следовательно, I — простой идеал. □

Определение 3. Пусть $I \triangleleft R$. Тогда *радикал идеала* I определяется как

$$\sqrt{I} = \mathrm{rad}(I) = \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in I\}.$$

Легко видеть, что $\sqrt{I}$ – идеал, содержащий I.

Пример 3. В кольце $F[x]$, для идеала (x^2) имеем:

$$\sqrt{(x^2)} = (x).$$

Следствие 3.

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \triangleleft R \\ P \supseteq I,\ P\text{—простой}}} P.$$

Доказательство. Пусть $f \notin \sqrt{I}$. Тогда I – идеал, содержащий I, и не пересекающийся с мультипликативно замкнутым подмножеством $\{f^n \mid n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} = U$. Возьмем максимальный идеал P с таким свойством, по предложению 1 идеал P простой. Таким образом, $f \notin P$, значит,

$$f \notin \bigcap_{\substack{P \supseteq I \\ P\text{—простой}}} P.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{\substack{P \supseteq I \\ P\text{—простой}}} P \subseteq \sqrt{I}.$$

Обратно, пусть $f \in \sqrt{I}$. Тогда $f^n \in I$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $P \supseteq I$ — простой идеал, то $f^n \in P \Rightarrow f \in P$. Значит, f лежит во всех таких P, то есть

$$f \in \bigcap_{\substack{P \supseteq I \\ P\text{—простой}}} P.$$

Следовательно,

$$\sqrt{I} \subseteq \bigcap_{\substack{P \supseteq I \\ P\text{—простой}}} P.$$

Поллучены включения в обе стороны, следовательно, доказано равенство

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \lhd R \\ P \supseteq I,\ P \text{—простой}}} P.$$

$\square$

Определение 4. *Радикал кольца* R определяется как

$$\mathrm{rad}(R) := \mathrm{rad}((0)) = \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n = 0\}.$$

Непосредственно из следствия 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.

$$\mathrm{rad}(R) = \bigcap_{\substack{P \lhd R \\ P \text{ — простой}}} P.$$