

2. АВТОМОРФИЗМЫ.

Определение 1. Пусть G – группа. *Эндоморфизмом* группы G называется гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$. *Автоморфизм* группы G – это биективный эндоморфизм, то есть изоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$.

Задача 1. Какие структуры образуют множества $\text{End}(G)$ и $\text{Aut}(G)$ всех эндоморфизмов и автоморфизмов G соответственно с операцией композиции?

Задача 2. Опишите все эндоморфизмы и автоморфизмы группы

- а) $\mathbb{Z}$,
- б) $\mathbb{Z}_n$.

Чему при этом изоморфны $\text{End}(G)$ и $\text{Aut}(G)$?

Задача 3. Пусть группы G и H изоморфны. Докажите, что существует ровно $|\text{Aut}(G)|$ различных изоморфизмов $G \rightarrow H$.

Задача 4. а) Опишите явно все изоморфизмы между $\text{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ и $\mathbb{Z}_4$.

- б) * Для каких n группа $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ циклическая?

Задача 5. Пусть g – элемент группы G . Рассмотрим отображение $\varphi_g: G \rightarrow G$, $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

а) докажите, что φ_g – автоморфизм. (Такие автоморфизмы называются *внутренними*.)

б) докажите, что все внутренние автоморфизмы образуют подгруппу $\text{Inn}(G)$ в $\text{Aut}(G)$.

в) докажите, что $\text{Inn}(G)$ нормальна в $\text{Aut}(G)$.

г) докажите, что $\text{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

Задача 6. Докажите, что $\text{Aut}(S_3) = \text{Inn}(S_3) \cong S_3$.

Задача 7. а) * Докажите, что при $n \neq 6$ выполняется $\text{Aut}(S_n) = \text{Inn}(S_n)$.

- б) * Приведите пример внешнего автоморфизма S_6 .

Задача 8. Сколько элементов в

- а) $\text{Inn}(D_n)$?
- б) $\text{Aut}(D_n)$?

Задача 9. Чему изоморфна группа $\text{Aut}(D_4)$?

Задача 10. Чему изоморфна группа $\text{Aut}(Q_8)$?

Определение 2. Подгруппа $H \subset G$ называется *характеристической*, если она сохраняется (не поэлементно, а в целом как множество) при любом автоморфизме группы G .

Задача 11. а) Докажите, что любая характеристическая подгруппа нормальна.

б) Приведите пример характеристической подгруппы.

в) Приведите пример нормальной, но не характеристической подгруппы.