3. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы. Фактор-группы.

Определение 3. Центр группы G – это множество элементов, коммутирующих со всеми. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in g : zg = gz\}$.

Задача 12. Докажите, что $Z(G)$ – подгруппа.

Задача 13. Найдите центр группы
а) D_n
б) Q_8
в) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Задача 14. Докажите, что подгруппа, индекс которой 2, нормальна.

Задача 15. $*$ Докажите теорему Коши. Пусть G – конечная группа. И пусть p – простой делитель порядка G. Тогда в G есть подгруппа порядка p.

Задача 16. $*$ Приведите пример того, что предыдущая задача не верна, если p не простое.

Задача 17. Опишите смежные классы $\mathbb{Z}$ по $n\mathbb{Z}$, найдите факторгруппу $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Задача 18. Опишите левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $\langle(1,2)\rangle$.

Задача 19. Докажите, что подгруппа A_n нормальна в S_n. Опишите смежные классы S_n по A_n, найдите факторгруппу S_n/A_n.

Задача 20. Докажите, что подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ нормальна в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Опишите смежные классы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ по $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, найдите факторгруппу.

Задача 21. Докажите, что подгруппа V_4 нормальна в S_4. Найдите факторгруппу S_4/V_4.

Задача 22. Докажите, что подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали нормальна в группе верхнетреугольных матриц. Найдите факторгруппу.

Задача 23. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0}$.

Задача 24. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$.

Задача 25. Пусть $G = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det A^6 = 1\}$. Найдите факторгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/G$.

Задача 26. Пусть H_n – множество комплексных чисел с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$. Найдите факторгруппу H_{12}/H_4.

Задача 27. Приведите пример подгрупп $A \subset B \subset C$ таких, что A нормальна в B, B нормальна в C, но A не нормальна в C.

Задача 28. $*$ Пусть H – подгруппа индекса k в группе G. Докажите, что существует нормальная подгруппа $G \triangleright N$ такая, что $N \subset H$ и индекс N в G не превосходит $k!$.