

ЛЕКЦИЯ 5

Пример 1. Построим сюръективный гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$. Рассмотрим 4 переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и три многочлена от этих переменных:

$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad f_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad f_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Если применить к x_1, x_2, x_3, x_4 перестановку σ , то f_i переставятся между собой по перестановке $\tau(\sigma)$. Ясно, что $\tau(\sigma \circ \delta) = \tau(\sigma) \circ \tau(\delta)$, то есть τ – гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$.

Заметим, что $\tau(2, 3) = (1, 2)$, значит, $(1, 2) \in \text{Im } \tau$. Аналогично можно проверить, что все транспозиции лежат в образе τ . Поскольку S_3 порождается транспозициями, гомоморфизм τ сюръективен. Легко видеть, что $V_4 \subset \text{Ker } \varphi$. С другой стороны $|\text{Ker } \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$. Следовательно, $\text{Ker } \varphi = V_4$.

По теореме о гомоморфизме получаем следующий изоморфизм:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Теорема 1 (Теорема о факторизации прямого произведения). Пусть $G_1, \dots, G_k$ – группы. В каждой группе G_i фиксируем нормальную подгруппу H_i . Тогда $H_1 \times \dots \times H_k$ является нормальной подгруппой $G_1 \times \dots \times G_k$ и

$$(G_1 \times \dots \times G_k)/(H_1 \times \dots \times H_k) \cong G_1/H_1 \times \dots \times G_k/H_k.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi: G_1 \times \dots \times G_k \rightarrow G_1/H_1 \times \dots \times G_k/H_k,$$

$$\varphi: (g_1, \dots, g_k) \mapsto (g_1H_1, \dots, g_kH_k).$$

Легко видеть, что φ – это сюръективный гомоморфизм, ядро которого совпадает с $H_1 \times \dots \times H_k$. Это доказывает оба утверждения. $\square$

Лемма 1. Пусть G – группа, $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа. Тогда $\langle K \cup H \rangle = KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$.

Доказательство. Докажем, что KH замкнуто относительно умножения. Действительно,

$$(k_1h_1)(k_2h_2) = k_1k_2k_2^{-1}h_1k_2h_2 = k_1k_2(k_2^{-1}h_1k_2)h_2 = k_1k_2\hat{h}h_2 \in KH.$$

Теперь докажем, что KH замкнуто относительно взятия обратного:

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = k^{-1}kh^{-1}k^{-1} = k^{-1}(kh^{-1}k^{-1}) = k^{-1}\tilde{h} \in KH.$$

Поскольку KH не пусто, это группа. Очевидно, что KH – наименьшая подгруппа, содержащая K и H . $\square$

Теорему о гомоморфизме мы также будем называть первой теоремой об изоморфизме (это название гораздо менее общепринято). Мы докажем два следствия из теоремы о гомоморфизме, которые назовем второй и третьей теоремами об изоморфизме.

Теорема 2. (Вторая теорема об изоморфизме) Пусть G – группа, $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа.

- 1) $H \cap K$ – нормальная подгруппа в K и H – нормальная подгруппа в KH ,
- 2) $KH/H \cong K/(H \cap K)$.

Доказательство. 1) Пусть $a \in H \cap K$, $k \in K$. Тогда $a \in H \Rightarrow kak^{-1} \in H$. С другой стороны $a \in K \Rightarrow kak^{-1} \in K$. То есть $kak^{-1} \in H \cap K$. То есть $(H \cap K) \triangleleft K$.

Пусть $h \in H, g \in KH$, тогда, так как $g \in G, ghg^{-1} \in H$. Значит, $H \triangleleft KH$.

2) Рассмотрим $\Psi: K \rightarrow (KH)/H, k \mapsto kH$. Докажем, что Ψ – сюръекция. Действительно, пусть $khH \in (KH)/H$. Тогда $khH = kH = \Psi(k)$. Легко видеть, что Ψ – гомоморфизм. Найдем ядро Ψ . Пусть $k \in \text{Ker } \Psi$, тогда $kH = H$. Это значит, что $k \in H$. С другой стороны $k \in K$. То есть $k \in (H \cap K)$. Итак, $\text{Ker } \Psi = H \cap K$. По теореме о гомоморфизме $K/(H \cap K) \cong KH/H$. $\square$

Теорема 3. (Третья теорема об изоморфизме) Пусть $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$ – сюръективный гомоморфизм, $K = \text{Ker } \varphi$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ – подгруппа. Пусть $H = \varphi^{-1}(\tilde{H})$ – полный прообраз. Тогда

1) $\tilde{H} \leftrightarrow H$ – биекция между подгруппами в $\tilde{G}$ и подгруппами в G , содержащими K .

2) Подгруппа H нормальна в G тогда и только тогда, когда $\tilde{H}$ нормальна в $\tilde{G}$.

3) Если H и $\tilde{H}$ нормальны, то $G/H \cong \tilde{G}/\tilde{H}$.

Доказательство. 1) Для подгруппы $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ обозначим через $\Omega(\tilde{H}) = H$ подгруппу $\varphi^{-1}(\tilde{H}) \subset G$. Легко видеть, что $\Omega(\tilde{H})$ содержит $K = \varphi^{-1}(e)$. Пусть H – подгруппа G , содержащая K , обозначим через $\Theta(H)$ образ $\varphi(H)$, это подгруппа в $\tilde{G}$. Докажем, что Ω и Θ – взаимно обратные отображения. Для этого надо проверить, что $\Omega \circ \Theta = \text{id}$ и $\Theta \circ \Omega = \text{id}$. Действительно, $\Theta \circ \Omega(\tilde{H})$ – это образ от полного прообраза $\tilde{H}$, то есть $\tilde{H}$. Теперь рассмотрим $\Omega \circ \Theta(H)$ – полный прообраз от образа H . Очевидно, что $H \subset \Omega \circ \Theta(H)$. Пусть $g \in \Omega \circ \Theta(H)$, тогда $\varphi(g) \in \Theta(H)$. Следовательно, есть $h \in H$ такое, что $\varphi(h) = \varphi(g)$. Тогда $\varphi(h^{-1}g) = e$, то есть $h^{-1}g \in K$. Значит $g = hk \in H$. Итак, $\Omega \circ \Theta(H) = H$.

2) Пусть $G \triangleright H$. Рассмотрим $\tilde{h} \in \tilde{H}, \tilde{g} \in \tilde{G}$. Так как гомоморфизм φ сюръективный, найдутся $h \in H$ и $g \in G$ такие, что $\varphi(h) = \tilde{h}, \varphi(g) = \tilde{g}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, а значит, $\tilde{g}\tilde{h}\tilde{g}^{-1} = \varphi(ghg^{-1}) \in \tilde{H}$. Таким образом, $\tilde{H} \triangleleft \tilde{G}$.

Пусть теперь $\tilde{H} \triangleleft \tilde{G}$. Рассмотрим $g \in G, h \in H$. Тогда $\varphi(g) \in \tilde{G}, \varphi(h) \in \tilde{H}$, а значит, $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in \tilde{H}$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, то есть $G \triangleright H$.

3) Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\Psi = \pi_{\tilde{H}} \circ \varphi: G \rightarrow \tilde{G}/\tilde{H}$. Так как φ и $\pi_{\tilde{H}}$ – сюръекции, Ψ – также сюръекция. Заметим, что $\Psi(g) = e\tilde{H}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g) \in \tilde{H}$, то есть $g \in H$. Получаем, что $\text{Ker } \Psi = H$. По теореме о гомоморфизме получаем $G/H \cong \tilde{G}/\tilde{H}$. $\square$

Следствие 1 (Следствие из третьей теоремы о гомоморфизме). Пусть H и N – две нормальные подгруппы группы G , причем $N \subset H$. Пусть $\pi_N: G \rightarrow G/N$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi_N(H) \cong H/N$ – нормальная подгруппа в G/N и

$$(G/N)/\pi_N(H) \cong G/H.$$

Менее формально можно написать

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H.$$

Доказательство. Гомоморфизм $\pi_N: G \rightarrow G/N$ сюръективен. Значит, мы находимся в условиях третьей теоремы о гомоморфизме. Поскольку H – нормальная подгруппа в G , $\pi_N(H)$ – также нормальная подгруппа в G/N . Так как $\text{Ker } \pi_N = N$, $\pi_N(H) \cong H/N$.

По пункту 3) третьей теоремы о гомоморфизме

$$G/H \cong (G/N)/\pi_N(H).$$

□

По сути переформулировкой данного следствия является следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$ – гомоморфизм. И пусть N – нормальная подгруппа в G . Тогда существует гомоморфизм $\xi: G/N \rightarrow \tilde{G}$ такой, что $\varphi = \xi \circ \pi_N$, тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \varphi \supseteq N$.

Доказательство. Мы можем заменить $\tilde{G}$ на образ φ и считать, что гомоморфизм φ сюръективен. Тогда $\tilde{G} = \text{Im } \varphi \cong G/\text{Ker } \varphi$. Если $\text{Ker } \varphi \supseteq N$, то мы находимся в условии предыдущего следствия имея в виду соответствие $H = \text{Ker } \varphi$. Тогда по следствию выполнено $\tilde{G} \cong G/\text{Ker } \varphi \cong (G/N)/\pi_N(\text{Ker } \varphi)$. Обозначим изоморфизм $(G/N)/\pi_N(\text{Ker } \varphi) \rightarrow \tilde{G}$ через α . Тогда обозначим через ξ композицию канонического гомоморфизма $(G/N) \rightarrow (G/N)/\pi_N(\text{Ker } \varphi)$ и α . □

Пример 2. Рассмотрим нормальные подгруппы $V_4 \subset A_4$ в S_4 . По предыдущему следствию получаем $S_4/A_4 \cong (S_4/V_4)(A_4/V_4)$. В самом деле, $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $S_4/V_4 \cong S_3$ (см. пример из прошлой лекции), $|A_4/V_4| = 3$, а значит, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$. При этом $\pi_{V_4}(A_4) \cong \mathbb{Z}_3$ – подгруппа в S_3 , следовательно, $\pi_{V_4}(A_4) = A_3$. И мы получаем, что

$$(S_4/V_4)(A_4/V_4) \cong S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2.$$