Лекция 8

Определение 1. Пусть в абелевой группе A есть базис $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$. Тогда группа A называется *свободной абелевой группой*. Будем обозначать эту группу

$$\mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n, \ldots).$$

Если базис конечен и имеет мощность n, то будем говорить, что A – свободная абелева группа ранга n и обозначать $\mathrm{rk}\, A = n$.

Задача 1. Докажите, что

$$\mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n) = \langle e_1, \ldots, e_n \mid e_i e_j e_i^{-1} e_j^{-1}, 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Лемма 1. *Пусть в абелевой группе A есть базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда любой другой базис этой группы также состоит из n элементов. (То есть ранг свободной абелевой группы определен однозначно.)*

Доказательство. Пусть в группе A есть другой базис $\{e'_1, \ldots, e'_m, \ldots\}$ и количество элементов в нем не равно n. Без ограничения общности мы можем считать, что в нем больше, чем n элементов. Рассмотрим $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ Так как $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис, каждый элемент e'_j выражается через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ с целыми коэффициентами: $e'_j = c_{1j}e_1 + \ldots + c_{nj}e_n$. Можно собрать все коэффициенты c_{ij} в целочисленную матрицу C размера $n \times n+1$ такую, что

$$(e'_1, \ldots, e'_{n+1}) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

Интерпретируем столбцы $C^{(1)}, \ldots, C^{(n+1)}$ матрицы C как векторы из пространства $\mathbb{Q}^n$ строк с рациональными коэффициентами длины n. Тогда столбцы – это $n+1$ векторов в n-мерном векторном пространстве. По основной лемме о линейной зависимости столбцы C линейно зависимы, то есть есть рациональные числа $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ не все равные нулю такие, что

$$\frac{p_1}{q_1}C^{(1)} \ldots + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}C^{(n+1)} = 0.$$

Домножим это равенство на произведение знаменателей и получим

$$k_1 C^{(1)} \ldots + k_{n+1} C^{(n+1)} = 0$$

для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$ не всех равных нулю. Но тогда $k_1 e'_1 + \ldots + k_{n+1} e'_{n+1} = 0$, что противоречит линейной независимости $\{e'_1, \ldots, e'_{n+1}, \ldots\}$. □

Замечание 1. Пусть $F = \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $F = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. В самом деле, сопоставим элементу $k_1 e_1 + \ldots k_n e_n \in \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_n)$ элемент $(k_1 e_1, \ldots, k_n e_n) \in \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle$. Легко проверить, что это изоморфизм.

Предложение 1. *Подгруппа L свободной абелевой группы F ранга n – это свободная абелева группа ранга $m \leq n$.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по n.

База индукции $n = 1$. $F \cong \mathbb{Z}$. Любая подгруппа в $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}$. При $k \neq 0$ это свободная абелева группа ранга 1. Если же $k = 0$ получаем свободную абелеву группу ранга ноль.

Шаг индукции. Пусть для $n < k$ утверждение доказано. Рассмотрим

$$P = \mathcal{A}(e_1, \ldots, e_{n-1}) \subset F.$$

Обозначим $B = P \cap L$. Так как P – свободная группа ранга $n-1$, по предположению индукции $B \subset P$ – свободная абелева группа ранга не более $n-1$. Если $L \subset P$, то $L = B$ – свободная абелева группа ранга не более $n-1$. Пусть $L \neq B$. Рассмотрим гомоморфизм $\pi\colon F \to \mathbb{Z}$, $\pi(k_1e_1 + \ldots + k_ne_n) = k_n$. Тогда образ π – циклическая группа и найдется $l \in L$ такой, что $\operatorname{Im}\pi = \langle\pi(l)\rangle$. Пусть $s = t_1e_1 + \ldots t_ne_n \in L$. Тогда $\pi(s) \in \langle\pi(s)\rangle$. То есть $\pi(s) = q\pi(s)$ для некоторого целого q. Получаем $\pi(s - ql) = 0$, то есть $s - ql \in B$. Значит, $s \in B \oplus \langle l\rangle$ (данные две подгруппы пересекаются только по нулю, так как $\pi(l) \neq 0$). Получаем $L = B \oplus \langle l\rangle$ – свободная абелева группа ранга $\operatorname{rk} B + 1 \leq n$. □

Теорема 1 (Универсальное свойство свободной абелевой группы)**.** *Пусть A – абелева группа с образующими $a_1, \ldots, a_n$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \to A,$$

причем $\varphi(x_i) = a_i$.

Доказательство. Подходит гомоморфизм определенный по правилу

$$\varphi(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) = k_1a_1 + \ldots + k_na_n.$$

□

Применяя теорему о гомоморфизме, получаем следствие.

Следствие 1. *Каждая конечно порожденная абелева группа изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы по некоторой подгруппе (ядру гомоморфизму φ).*

Теорема 2 (Универсальное свойство свободной абелевой группы)**.** *Пусть A – абелева группа с образующими $a_1, \ldots, a_n$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n) \to A,$$

причем $\varphi(x_i) = a_i$.

Доказательство. Подходит гомоморфизм определенный по правилу

$$\varphi(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) = k_1a_1 + \ldots + k_na_n.$$

□

Применяя теорему о гомоморфизме, получаем следствие.

Следствие 2. *Каждая конечно порожденная абелева группа изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы по некоторой подгруппе (ядру гомоморфизму φ).*

Опишем все базисы данной свободной абелевой группы через один фиксированный базис.

Определение 2. Обозначим через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ множество целочисленных матриц $n \times n$, обратные к которым также являются целочисленными.

Замечание 2. Множество $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ является группой по умножению матриц. В самом деле, умножение двух целочисленных матриц A и B дает целочисленную матрицу, обратная к которой равна $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, а значит, целочисленная. Таким образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ замкнуто относительно умножения. Замкнутость относительно взятия обратного элемента очевидна. Также $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Мы проверили, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ – подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

Лемма 2. *Группа* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ *состоит из целочисленных матриц с определителем* ± 1

Доказательство. У целочисленной матрицы целый определитель. Значит, если $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, то $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$. Но $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$. Значит, $\det A = \pm 1$.

Напротив, если для целочисленной матрицы выполнено $\det A = \pm 1$, то применяя формулу через алгебраические дополнения, получаем, что обратная матрица A^{-1} также является целочисленной. □

Предложение 2. *Пусть* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *базис свободной абелевой группы* F*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *– базис* F*;*

2) $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$*, где* $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$*.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис F, каждый вектор выражается через $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Значит, $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C – некоторая целочисленная матрица $n \times n$. Аналогично $(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)D$ для некоторой целочисленной матрицы D. Тогда $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n)CD$. Так как $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис, получаем $CD = E$. Значит, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

$2 \Rightarrow 1$. Для любого $f \in F$ выполняется

$$f = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом любой элемент f выражается через $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Так как матрица C невырожденная, система $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ линейно независима над $\mathbb{Z}$. Значит, это базис F. □

Примерами матриц из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ являются матрицы следующих элементарных преобразований:

1) прибавление одной строки к другой с целым коэффициентом,

2) смена двух строк местами

3) умножение строки на -1.

Таким образом, переходя от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e_1, \ldots, e_n)C$ мы можем делать данные элементарные преобразования с данным базисом. Назовем данные элементарные преобразования базиса *допустимыми*.

Рассмотрим пару состоящую из свободной абелевой группы $F = \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$ и ее подгруппы $L = \mathcal{A}(y_1, \ldots, y_m)$, $m \leq n$. Тогда

$$(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n)P,$$

где P – целочисленная матрица размера $n \times m$.

Теорема 3 (Теорема о согласованных базисах)**.** *Существует такой базис* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *группы* F *и такие натуральные числа* $u_1, \ldots u_m$*, что* u_i *делится на* u_j *при* $i > j$*, и система* $\{u_1 e_1, \ldots, u_m e_m\}$ *является базисом* L*.*

Доказательство. Будем делать элементарные преобразования с базисами группы F и подгруппы L. Пусть $(x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1, \ldots, x_n)C$, $(y'_1, \ldots, y'_m) = (y_1, \ldots, y_m)D$, тогда равенство $(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n)P$ дает $(y'_1, \ldots, y'_m) = (x'_1, \ldots, x'_n)C^{-1}PD$. При умножении P слева на матрицу C^{-1} и справа на матрицу D происходят допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P. Далее утверждение теоремы следует из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть P – целочисленная матрица $n \times m$. Делая допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P можно привести P к виду*

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Причем если $i > j$, то u_i делится на u_j.

Доказательство леммы. Если не все коэффициенты матрицы равны нулю, то перестановкой строк и столбцов можно поставить на место p_{11} ненулевой элемент с минимальным модулем. Далее будем уменьшать минимальный модуль ненулевого элемента пока это будет возможно.

Случай 1. В первой строке матрицы P есть элемент p_{1i} не делящийся на p_{11}. Поделим p_{1i} на p_{11} с остатком: $p_{1i} = qp_{11} + r$, $0 < |r| < |p_{11}|$. Прибавим первый столбец к i-му с коэффициентом $-q$. На месте p_{1i} получим r. Таким образом мы уменьшили модуль минимального по модулю ненулевого элемента.

Случай 2. В первом столбце матрицы P есть элемент p_{i1} не делящийся на p_{11}. Прибавляя 1-ю строку к i-ой с нужным коэффициентом получаем элемент с модулем меньше $|p_{11}|$ в первом столбце.

Случай 3. Все элементы первой строки и первого столбца делятся на p_{11}, но есть p_{ij}, не делящийся на p_{11}. Прибавим первую строку и первый столбец к остальным так, чтобы все элементы, кроме p_{11} стали равны нулю. При этом p_{ij} все равно не будет делиться на p_{11} (к нему прибавилось нечто делящееся на p_{11}). Прибавим i-ю строку к первой и попадем в случай 1.

Так как бесконечно уменьшать модуль минимального ненулевого элемента мы не можем, рано или поздно получится ситуация, когда все элементы p_{ij} делятся на p_{11}. Тогда можно сделать все элементы первой строки и первого столбца нулевыми. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2m} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Далее работаем аналогичным образом с матрицей без первой строки и первого столбца. При этом элементарные преобразования строк со 2 по n-ю и столбцов со 2-го по m-ый не меняет того, что все элементы p_{ij} делятся на u_1. В итоге получаем нужный вид матрицы. □

Замечание 3. Легко доказать, что при допустимых элементарных преобразованиях НОД всех элементов матрицы не меняется. Поэтому u_1 равен НОД всех элементов матрицы.

□

Следствие 3. *Любая конечно порожденная абелева группа изоморфна*

$$\mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z},$$

где u_i делится на u_j, если $i > j$.

Доказательство. Пусть A – конечно порожденная абелева группа. По теореме 2 существует сюръективный гомоморфизм φ из свободной абелевой группы F конечного ранга n в группу A. Применим теорему о согласованных базисах к паре $\operatorname{Ker}\varphi \subset F$. Получаем

$$F = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle,$$
$$\operatorname{Ker}\varphi = \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle u_m e_m \rangle \oplus \{0\} \oplus \ldots \oplus \{0\}.$$

Применяя теорему о факторизации прямого произведения, получаем

$$A \cong F/\operatorname{Ker}\varphi \cong \langle e_1 \rangle / \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_m \rangle / \langle u_m e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle / \{0\} \oplus \ldots \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Назовем такую форму записи A *первой канонической формой абелевой группы.*

Определение 3. Абелева группа называется примарной, если она имеет порядок p^a, где p – простое число, $a \in \mathbb{N}$.

Применим китайскую теорему об остатках к группе $\mathbb{Z}_u$. Пусть $u = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\mathbb{Z}_u \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Применив это к каждому слагаемому первой канонической формы абелевой группы A и переупорядочив слагаемые, получим *вторую каноническую форму группы A*

$$\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \ldots \oplus$$
$$\oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Здесь каждое простое число может несколько раз встречаться в одной и той же степени в качестве порядка циклического слагаемого.

Наша цель – доказать что первая и вторая канонические формы действительно канонические (то есть одну группу нельзя представить двумя различными способами в такой форме). Начнем со второй формы.

Теорема 4 (Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп)**.** *Пусть A – конечно порожденная абелева группа. Тогда A изоморфна прямой сумме конечного числа циклических групп. Каждая из этих циклических групп либо является бесконечной циклической группой, либо примарной циклической группой. И такое разложение единственно с точностью до перестановки прямых слагаемых.*