1. В $\mathbb{R}^5$ заданы подпространства $U =< (1, 2, 1, 3, 2), (2, 5, -1, 4, 7) >$ и

$$W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

а) Найдите $U \cap W$.
б) В подпространствах U и W выберите такие подпространства U_1 и W_1, чтобы $U + W = U_1 \oplus (U \cap W) \oplus W_1$.

2. В пространстве матриц $M_2(\mathbb{R})$ рассмотрим подмножества

$$U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | \mathrm{tr} X = 0\},\ W =< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} > .$$

а) Докажите что U и W подпространства в $M_2(\mathbb{R})$;
б) Докажите, что $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$ и найдите проекцию $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ на U вдоль W.

3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Линейные функции e^1, e^2, e^3 определяются следующим образом:

$$e^1(f) = f(0),\ e^2(f) = f'(0),\ e^3(f) = f(1),$$

где f произвольный элемент V.
а) Докажите, что e^1, e^2, e^3 — базис V^*.
б) Найдите двойственный к нему базис в V.

4. Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ переводит вектор (x_1, x_2, x_3, x_4) в вектор $(x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_3 + x_4, x_2 + x_3)$.
а) Найдите матрицу этого линейного отображения в стандартных базисах.
б) Найдите базисы в ядре и образе.
в) Найдите базисы, в которых отображение имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали.

5. Оператор φ имеет в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите
а) собственные значения и для каждого собственного значения предъявите один собственный вектор;
б) найдите базисы в собственных и корневых подпространствах;

6. Линейный оператор A в некотором в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Известно, что характеристический многочлен $\chi_A(t) = (t+1)^4$. Найдите
а) жорданову нормальную форму;
б) жорданов базис;
в) минимальный многочлен;

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите:
а) $f(A)$, где $f(x) = 4x^5 - 7x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$;
б) $\exp(A)$.

8. Эквивалентны ли квадратичные функции q_1 и q_2 а) над $\mathbb{R}$; б) над $\mathbb{C}$?

$$q_1(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2;$$

$$q_2(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2.$$

9. Найти проекцию вектора $x = (7, -4, -1, 2)$ на подпространство U, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

10. В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением заданы линейные операторы φ и ψ с матрицами в стандартном базисе $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $A_\psi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. а) Проверьте, что оператор φ является самосопряженным и найдите канонический базис для него;
б) Проверьте, что оператор ψ является ортогональным и найдите канонический базис для него.

11. На двухмерном унитарном векторном пространстве задан унитарный оператор:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Найдите базис, в котором A имеет канонический вид.

12. В аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы подпространства P_1 и P_2:

$$P_1 = (1,0,1,0) + \langle (1,1,-1,0) \rangle\,,$$

$$P_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = & 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 = & 2 \end{cases}$$

а) Найдите расстояние между P_1 и P_2;
б) Найдите прямую, пересекающую P_1 и P_2, а также проходящую через точку $b = (1,1,1,0)$.

13. Аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводит точки

$$a_1(1,2), a_2(2,2), a_3(1,3)$$

в точки

$$b_1(6,3), b_2(9,2), b_3(7,4).$$

Найдите все неподвижные точки и все инвариантные прямые для этого аффинного преоразования.

14. Пусть дан тензор $t \in \mathbb{T}^1_1$

$$t = (e_1 + e_2 - 3e_3) \otimes (e^1 + 2e^2 - e^3) + (e_1 + e_3) \otimes (e^2 - e^3).$$

а) Найдите значение $t(l, v)$, где $l = e^1 + e^2 - e^3,\ v = 2e_1 + e_2 - e_3$;
б) Поднимите нижний индекс относительно скалярного произведения, заданного матрицей G:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

в) Пусть φ — линейный оператор, соответствующий t. Найдите $\varphi(v)$;
г) Пусть $t_2 = (e_1 + e_2 - e_3) \otimes (2e_1 - e_2 + e_3) \in \mathbb{T}^2_0$. Найдите $\mathrm{Sym}(t_2)$ и $\mathrm{Alt}(t_2)$.