Линейные функции.

1. а) Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Показать, что отображение

$$f : X \mapsto \mathrm{tr} AX$$

является линейной функцией. Найти ее координатную запись в стандартном базисе пространства матриц $M_n(\mathbb{R})$.

б) Показать, что для любой линейной функции f на пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ найдется такая матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$, что $f(X) = \mathrm{tr} AX$ для всех $X \in M_n(\mathbb{R})$.

2. В базисе (e_1, e_2, e_3) пространства $\mathbb{R}^3$ задана линейная функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Найти координатную запись этой функции в базисе $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$.

3. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис (e_1, e_2, e_3):

а) $(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 1, 1))$;

б) $(e_1 = (2, 7, 3), e_2 = (3, 9, 4), e_3 = (1, 5, 3))$;

Найти сопряженный с ним базис (f^1, f^2, f^3).

4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис (e_1, e_2, e_3) и в этом базисе записаны три линейные функции f^1, f^2, f^3:

а) $(e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (0, 0, 1))$;

$f^1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, f^2(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3, f^3(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$;

б) $(e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 0, 0))$;

$f^1(x) = x_1 + x_2 + x_3, f^2(x) = x_1 + x_2, f^3(x) = x_3$.

Найти базис, для которого (f^1, f^2, f^3) является сопряженным базисом.