

ПРОГРАММА КУРСА "ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ". 2025 г.  
ЛЕКТОР С.А. ГАЙФУЛЛИН.

- 1) Схема симплификации. Эквивалентные условия свойства канонизации схемы симплификации.
- 2) Линейная схема симплификации. Полная система.  $H$ -представление. Эквивалентные условия свойства канонизации линейной схемы симплификации.
- 3) Лексикографический порядок на мономах. Обрыв убывающих цепочек. Старший член многочлена. Элементарные редукции. Остаток многочлена при редукции по данной системе. Система Гребнера.
- 4)  $S$ -полиномы. Критерий Бухбергера. Базис Гребнера идеала в кольце многочленов. Критерий того, что базис идеала является базисом Гребнера.
- 5) Лемма Диксона. Существование конечного Базиса Гребнера у каждого идеала. Теорема Гильберта о базисе.
- 6) Алгоритм Бухбергера построения базиса Гребнера. Доказательство того, что он останавливается за конечное число шагов. Задача вхождения элемента в идеал.
- 7) Проблема вхождения многочлена в идеал. Проблема равенства идеалов.
- 8) Пересечение идеала в  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  с подалгеброй  $\mathbb{K}[x_k, \dots, x_n]$ .
- 9) Поиск пересечения идеалов.
- 10) Проблема вхождения многочлена в радикал идеала. Проблема вхождения многочлена в подалгебру.
- 11) Лемма о достраивании корня.
- 12) Лемма о промежуточной замене.
- 13) Решение полиномиальных систем. Свободные параметры.
- 14) Теорема Гильберта о нулях.
- 15) Рост алгебры. Рост свободной ассоциативной алгебры. Рост свободной ассоциативной коммутативной алгебры. Инвариантность количества свободных параметров.
- 16) Существование не алгоритмически разрешимых задач.
- 17) Существование полугруппы, в которой неразрешима проблема равенства слов.
- 18) Задание полугруппы порождающими и соотношениями. Задание группы порождающими и соотношениями. Свободная группа. Проблема равенства слов в свободной группе.