Программа коллоквиума

1) Простейшие следствия из аксиом группы (6 штук), в том числе обобщенная ассоциативность, единственность единицы и обратного.

2) Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Таблица Кэли. Подгруппа. Проверка, что подмножество является группой. Ассоциативность композиции. Примеры групп.

3) Гомоморфизм групп, простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизм групп. Примеры изоморфизмов. Доказательство, что Q_8 – это группа.

4) Ядро и образ гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма.

5) Степень элемента группы. Порядок элемента группы. Порядок степени данного элемента. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.

6) Автоморфизмы. Группа внутренних автоморфизмов. Группы автоморфизмов групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$.

7) Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее (в том числе теорема Эйлера).

8) Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Объяснение, почему определение факторгруппы корректно тогда и только тогда, когда подгруппа нормальна. Канонический гомоморфизм.

9) Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядками ядра и образа.

10) Подгруппа, порожденная подмножеством. Подгруппа, порожденная двумя подгруппами, одна из которых нормальна. Вторая теорема о изоморфизме.

11) Третья теорема о изоморфизме и следствие из нее.

12) Центр группы. Изоморфизм между факторгруппой по центру и группой внутренних автоморфизмов. Нециклличность факторгруппы по центру.

13) Эквивалентность слов. Свободная группа. Проблема равенства слов.

14) Универсальное свойство свободной группы. Нормальное замыкание. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: группа диэдра.

15) Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Теорема о факторизации прямого произведения.

16) Свободная абелева группа. Ранг свободной абелевой группы. подгруппа свободной абелевой группы. Описание всех базисов через заданный базис.

17) Универсальное свойство свободной абелевой группы. Теорема о согласованных базисах. Представление конечнопорожденной абелевой группы в виде суммы циклических.

18) Китайская теорема об остатках. Порядок элемента прямого произведения. Теорема о строении конечно порожденны абелевых групп (существование).

19) Подгруппа кручения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность). Единственность первой канонической формы конечно порожденной абелевой группы.

20) Экспонента группы. Критерий цикличности абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

21) Действие группы на множестве. Примеры действий. Три действия на себе. Связь между действиями и гомоморфизмами в $S(X)$. Орбиты и стабилизаторы. Стабилизаторы точек из одной орбиты.

22) Связь между порядком орбиты и порядком стабилизатора (формула орбит). Порядок группы вращений куба. Изоморфизм группы вращений куба и S_4. Изоморфизм группы симметрий правильного тетраэдра и S_4.

23) Ядро неэффективности действия. Сведение действия к действию факторгруппы по нормальной подгруппе, лежащей в ядре неэффективности. Изоморфизм действий. Свободные и транзитивные действия. Классификация свободных транзитивных действий. Теорема Кэли.

24) Действие сопряжениями. Централизаторы и классы сопряженности. Критерий нормальности подгруппы в терминах классов сопряженности. Классы сопряженности в S_n. Неединичность центра p-группы. Группы порядка p^2.

25) Лемма Бернсайда. Пример применения.

26) Коммутатор элементов группы. Коммутант группы. Представление коммутанта как множества произведений коммутаторов. Нормальность коммутанта, фактор по коммутанту. Коммутант – наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев. Биекция между гомоморфизмами $G \to A$ в абелеву группу и гомоморфизмами $G/G' \to A$.

27) Коммутанты S_n, A_n, $\mathrm{SL}_n(F)$ и $\mathrm{GL}_n(F)$ при $|F| \geq 4$.

28) Характеристические подгруппы. Транзитивность свойства характеристичности. Характеристичность коммутанта и центра. Нормальность кратных коммутантов.

29) Разрешимые группы. Разрешимость подгруппы и факторгруппы.

30) Критерий разрешимости. Разрешимость групп S_n и A_n при $n \leq 4$. Неразрешимость групп S_n и A_n при $n \geq 5$. Разрешимость группы невырожденных верхнетреугольных матриц.