

Программа коллоквиума по алгебре

1-й поток 2-й курс, 2023 г.

(лектор – Куликова О.В.)

(Предварительный вариант программы. Если какой-то из перечисленных ниже вопросов не будет рассмотрен на лекциях до 29-го октября, он будет исключен из программы. Окончательный вариант будет представлен 30-го октября.)

1. Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Изоморфизм групп. Простейшие свойства. Примеры. Порядок элемента группы. Свойства.
2. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.
3. Подгруппы. Примеры. Система порождающих. Примеры систем порождающих для S_n , $GL_n(F)$. Пример не конечно порожденной группы.
4. Отношение сравнимости по модулю подгруппы. Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
5. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядком ядра и образа. Канонический гомоморфизм.
6. Свободная группа. Универсальное свойство свободных групп.
7. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Теорема Дика.
8. Прямое произведение (прямая сумма) групп – внутреннее и внешнее. Их эквивалентность. Теорема о факторизации прямого произведения.
9. Конечно порожденные абелевы группы. Базис. Свободные абелевы группы. Инвариантность ранга. Все свободные абелевы группы одного ранга изоморфны.
10. Подгруппы свободных абелевых групп, их свобода и ранг.
11. Связь между различными базисами свободной абелевой группы. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной абелевой группы. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство существования).
13. Периодическая часть (подгруппа кручения). Разложение конечной абелевой группы в прямую сумму p -подгрупп, отвечающих различным простым p .
14. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство единственности).
15. Экспонента конечной группы. Критерий циклическости конечной абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
16. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Группа вращений куба. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Действие группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами. Теорема Кэли. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряженности и централизаторы. Центр группы. Классы сопряженности и центр группы S_n .
18. Центр конечной p -группы. Группы порядка p^2 (p – простое).
19. Нормализатор подгруппы. Число подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
20. Силовские подгруппы конечной группы. Первая теорема Силова (о существовании).
21. Вторая теорема Силова (о сопряженности). Следствие о нормальных силовских подгруппах.

22. Третья теорема Силова (о количестве).
23. Коммутаторы и коммутант. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы.
24. Системы порождающих групп $A_n, SL_n(F)$. Коммутанты групп S_n, A_n . Коммутанты групп $GL_n(F)$ и $SL_n(F)$ при $|F| > 3$.
25. Кратные коммутанты. Разрешимые группы. Свойства. При каких n группа S_n разрешима?
26. Неразрешимость групп $GL_n(F)$ и $SL_n(F)$ ($|F| > 3$). Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем. Разрешимость конечной p -группы и группы порядка pq , где p, q – простые.