

## **Программа коллоквиума по алгебре**

1-й поток 2-й курс, 2023 г.

(лектор – Куликова О.В.)

1. Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Изоморфизм групп. Простейшие свойства. Примеры. Порядок элемента группы. Свойства.
2. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.
3. Подгруппы. Примеры. Система порождающих. Примеры систем порождающих для  $S_n$ ,  $GL_n(F)$ . Пример не конечно порожденной группы.
4. Отношение сравнимости по модулю подгруппы. Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
5. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядком ядра и образа. Канонический гомоморфизм.
6. Свободная группа. Универсальное свойство свободных групп.
7. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Теорема Дика.
8. Прямое произведение (прямая сумма) групп – внутреннее и внешнее. Их эквивалентность. Теорема о факторизации прямого произведения.
9. Конечно порожденные абелевы группы. Базис. Свободные абелевы группы. Инвариантность ранга. Все свободные абелевы группы одного ранга изоморфны.
10. Подгруппы свободных абелевых групп, их свобода и ранг.
11. Связь между различными базисами свободной абелевой группы. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной абелевой группы. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство существования).
13. Периодическая часть (подгруппа кручения). Разложение конечной абелевой группы в прямую сумму  $p$ -подгрупп, отвечающих различным простым  $p$ .
14. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство единственности).
15. Экспонента конечной группы. Критерий цикличности конечной абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
16. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Группа вращений куба. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Действие группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами. Теорема Кэли. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряженности и централизаторы. Центр группы. Классы сопряженности и центр группы  $S_n$ .
18. Центр конечной  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$  ( $p$  – простое).
19. Нормализатор подгруппы. Число подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
20. Силоские подгруппы конечной группы. Первая теорема Силова (о существовании).
21. Вторая теорема Силова (о сопряженности). Следствие о нормальных силоских подгруппах.
22. Третья теорема Силова (о количестве).

23. Коммутаторы и коммутант. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы.
24. Системы порождающих групп  $A_n, SL_n(F)$ . Коммутанты групп  $S_n, A_n$ . Коммутанты групп  $GL_n(F)$  и  $SL_n(F)$  при  $|F| > 3$ .
25. Кратные коммутанты. Разрешимые группы. Свойства. При каких  $n$  группа  $S_n$  разрешима? Неразрешимость групп  $GL_n(F)$  и  $SL_n(F)$  ( $|F| > 3$ ). Разрешимость конечной  $p$ -группы, где  $p$  – простое.