

Вопросы к коллоквиуму по алгебре: осенний семестр 2026-2027 гг.

(1-й курс, 3-й поток, лектор — О.В. Маркова)

1. Система линейных алгебраических уравнений. Совместность и определённость. Элементарные преобразования и эквивалентные системы. Матрицы коэффициентов системы (обычная и расширенная).
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Критерии совместности и определенности в терминах ступенчатого вида. Улучшенный ступенчатый вид.
3. Арифметическое пространство. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости.
4. База и ранг системы строк (столбцов). Теорема о дополнении до базы. Корректность определения ранга (равномощность баз системы векторов).
5. Ранг матрицы (совпадение рангов системы строк, системы столбцов и числа ненулевых строк в ступенчатом виде).
6. Критерии совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц (теоремы Кронекера-Капелли).
7. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
8. Группа подстановок конечного множества. Знак подстановки (четность). Независимость четности от выбора таблицы, задающей подстановку.
9. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Изменение четности при умножении на транспозицию. Знак произведения подстановок.
10. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства (линейность, кососимметричность).
11. Определитель транспонированной матрицы. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы.
12. Определитель треугольной матрицы. Критерий равенства определителя нулю.
13. Определитель матрицы с углом нулей.
14. Определитель Вандермонда.
15. Миноры и алгебраические дополнения элементов. Разложение определителя по строке (столбцу). Лемма о «фальшивом» разложении определителя.
16. Теорема Крамера. Формулы Крамера для решения определённых квадратных систем линейных уравнений.
17. Миноры в прямоугольной матрице. Теорема об окаймляющих минорах. Теорема о ранге матрицы.
18. Операции над матрицами и их основные свойства. Отсутствие свойства коммутативности умножения матриц. Обобщенная ассоциативность умножения матриц.

- 19.Связь операции транспонирования с операциями суммы и умножения матрицы на число. Транспонирование произведения матриц.
- 20.Умножение матрицы на диагональную матрицу слева и справа. Единичная матрица, её единственность. Скалярные матрицы.
- 21.Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Критерий существования (в терминах определителя) и формула для нахождения элементов обратной матрицы (с помощью алгебраических дополнений).
22. Критерий существования (в терминах ранга и ступенчатого вида) и способ нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
- 23.Матричные единицы и их умножение. Элементарные матрицы и их связь с элементарными преобразованиями.
- 24.Определитель произведения матриц.
- 25.Ранг суммы и произведения матриц.
- 26.Факторизационный ранг матрицы. Матрицы ранга 1.
- 27.Матричная запись системы линейных уравнений. Строение общего решения неоднородной системы уравнений, его геометрическая интерпретация.
- 28.Подпространство решений однородной системы линейных уравнений. Задание произвольного подпространства арифметического пространства однородной системой линейных уравнений.