

Вопросы к коллоквиуму по курсу высшей алгебры за 3-й семестр.

2016 г. Лектор - Э.Б.Винберг

1. Отношение сравнимости по модулю подгруппы, Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
2. Ядро и образ гомоморфизма групп. Теорема о гомоморфизме.
3. Произведение (двух) подгрупп. Число элементов в произведении конечных подгрупп. Произведение подгрупп, одна из которых нормальна.
4. Разложение группы в прямое произведение подгрупп. Случай двух множителей. Внешнее прямое произведение групп, его связь с внутренним.
5. Китайская теорема об остатках.
6. Свободные (конечнопорожденные) абелевы группы. Равномощность всех базисов свободной абелевой группы.
7. Описание всех базисов свободной абелевой группы.
8. Свободность и ранг подгруппы свободной абелевой группы.
9. Характеризация решеток в вещественном векторном пространстве как дискретных подгрупп, порождающих пространство.
10. Кристаллографические группы. Возможные порядки элементов группы симметрии кристалла.
11. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп.
13. Единственность числа бесконечных слагаемых и суммы p -примарных слагаемых (для каждого данного p) в разложении конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп.
14. Единственность набора порядков слагаемых в разложении конечной абелевой p -группы в прямую сумму циклических подгрупп.
15. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Биекция между орбитой и множеством левых смежных классов по стабилизатору ее точки. Формула для длины орбиты конечной группы.
16. Действие группы на себе сопряжениями (внутренними автоморфизмами). Классы сопряженных элементов и централизаторы.

Формула для числа элементов конечной группы, сопряженных данному элементу.

17. Действие группы на множестве своих подгрупп сопряжениями. Нормализатор подгруппы. Формула для числа подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
18. Классы сопряженных элементов в группах S_n и A_n .
19. Системы порождающих в группе. Доказательство того, что группа S_n порождается транспозициями, а группа A_n – тройными циклами или (при $n > 4$) произведениями пар независимых транспозиций.
20. Доказательство того, что группа $GL_n(K)$ порождается элементарными матрицами, а группа $SL_n(K)$ – элементарными матрицами 1-го типа.
21. Центр группы. Центры групп S_n и $GL_n(K)$ (при $|K| > 2$).
22. Определение коммутанта группы и его характеристика как наименьшей нормальной подгруппы, факторгруппа по которой абелева.
23. Вычисление коммутантов групп S_n и A_n .
24. Вычисление коммутантов групп $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$ (при $|K| > 3$).
25. Кратные коммутанты группы. Разрешимые группы. При каких n группа S_n разрешима?
26. Критерий разрешимости группы. Разрешимость группы треугольных матриц.
27. Простые группы. Простота группы A_5 .
28. Простота группы SO_3 .
29. Нетривиальность центра конечной p -группы. Группы порядка p^2 .
30. Силовские подгруппы конечной группы. Силовские подгруппы конечной абелевой группы.
31. Первая теорема Силова.
32. Вторая теорема Силова.
33. Третья теорема Силова.
34. Группа автоморфизмов циклической группы.
35. Группы порядка pq .