

## Программа ЕНС «Прикладные вопросы алгебры»

- 1) Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы. Машина Тьюринга. Существование не алгоритмически разрешимой проблемы.
- 2) Задание полугруппы образующими и соотношениями. Задание группы образующими и соотношениями. Алгоритм проверки равенства слов в свободной группе.
- 3) Не разрешимость массовой проблемы равенства слов в полугруппах.
- 4) Схемы симплификации. Нормальная и каноническая форма элемента. 5 эквивалентных условий для схемы симплификации (одно из которых — условие канонизации).
- 5) Линейные схемы симплификации. Разложение подпространства элементов, имеющих каноническую форму, в прямую сумму подпространства нормальных элементов и подпространства элементов с нулевой канонической формой.
- 6) Пример линейной схемы симплификации: определение порядка на элементах, если задан порядок на базисных элементах. Редукции.
- 7) Шесть эквивалентных свойств для примера линейной схемы симплификации (одно из которых — свойство канонизации).
- 8) Лемма Диксона.
- 9) Мономиальные порядки. Условие минимальности. Примеры порядков. Утверждение о том, как устроены все мономиальные порядки (без доказательства).
- 10) Элементарная редукция. Редукция по системе полиномов. Остаток. Отсутствие бесконечных цепочек редукций. Система Грёбнера.
- 11) Нётеровы кольца (эквивалентные определения). Теорема Гильберта о базисе.
- 12) Базис Грёбнера. Критерий Бухбергера.
- 13) Алгоритм Бухбергера. Характеризация базиса Грёбнера в терминах старших членов.
- 14) Продолам вхождения элемента в идеал. Минимальный редуцированный базис Грёбнера. Проблема равенства идеалов.
- 15) Пересечение идеала с подкольцом многочленов от некоторых переменных.
- 16) Пересечение идеалов.
- 17) Лемма о достраивании корня.
- 18) Лемма о промежуточной замене.
- 19) Алгоритм решения полиномиальной системы.
- 20) Теорема Гильберта о нулях (слабая и сильная формулировки).
- 21) Проверка того, что данный многочлен принадлежит радикалу данного идеала.
- 22) Рост алгебры. Инвариантность количества параметров при решении полиномиальной системы.
- 23) Универсальный базис Грёбнера.

### Темы для типовых задач.

- 1) Провести редукцию (дойти до какого-нибудь остатка) данного многочлена по данной системе.
- 2) Проверить, является ли данная система системой Грёбнера.
- 3) Найти базис Грёбнера данного идеала.
- 4) Выяснить, принадлежит ли данный многочлен данному идеалу.
- 5) Найти пересечение данного идеала с данным подкольцом (многочленов от части переменных).
- 6) Выяснить, равны ли два идеала.
- 7) Найти пересечение данных идеалов.
- 8) Решить данную полиномиальную систему.
- 9) Проверка того, что данный многочлен принадлежит радикалу данного идеала.