

Программа экзамена по алгебре  
1 курс, 1 поток, 2022  
(лектор: Куликова О.В)

1. Матрицы: определение. Квадратные, диагональные, верхние и нижние треугольные матрицы. Единичная и нулевая матрицы. Лидеры строк матрицы. Матрицы ступенчатого вида и улучшенного ступенчатого вида. Элементарные преобразования над строками. Метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду.
2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Совместные и несовместные, определённые и неопределённые СЛАУ. Матрица коэффициентов и расширенная матрица системы. Метод Гаусса решения СЛАУ. Однородные системы линейных уравнений, их совместность. Однородные СЛАУ с числом уравнений меньше числа неизвестных.
3. Векторные пространства над  $\mathbb{R}$ : определение и примеры. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Критерий линейной зависимости. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем. Векторные подпространства: определение и примеры.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Линейная оболочка системы векторов. Определение множества, порождающего векторное пространство. Определение базиса. Свойства. Координаты вектора в базисе. Всякое конечномерное векторное пространство обладает базисом. Все базисы конечномерного векторного пространства содержат одно и то же число векторов. Определение размерности векторного пространства. Стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ .
6. Всякая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов является базисом линейной оболочки системы. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса.
7. Определение ранга системы векторов. Определение ранга матрицы как ранга системы ее строк. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.
8. Ранг системы столбцов матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над столбцами. Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов.
9. Критерий совместности (теорема Кронекера-Капелли) и критерий определенности СЛАУ в терминах рангов матриц. Однородные СЛАУ. Свойства решений однородной СЛАУ. Пространство решений однородной СЛАУ и его базис (фундаментальная система решений). Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ.

10. Связь между множествами решений совместной системы линейных уравнений и ассоциированной системы однородных линейных уравнений.
11. Изоморфизм векторных пространств. Всякое  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}^n$ .
12. Линейные отображения векторных пространств. Задание линейного отображения матрицей.
13. Операции над линейными отображениями и их матрицами.
14. Операции сложения матриц и умножения матриц на число, свойства. Стандартный базис в пространстве матриц. Умножение матриц, свойства. Транспонирование матриц, свойства.
15. Ранг суммы матриц. Ранг произведения матриц.
16. Определение перестановки из  $n$  элементов. Четность и знак перестановки, их изменение при любой транспозиции. Число перестановок, число четных (нечетных) перестановок.
17. Определитель квадратной матрицы: формула полного разложения определителя. Определитель как полилинейной кососимметрической функции строк. Когда полилинейная кососимметрическая функция строк совпадает с определителем?
18. Элементарные преобразования над строками определителя. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
19. Определитель транспонированной матрицы. Определитель как функция от столбцов матрицы.
20. К какому виду можно привести матрицу с помощью элементарных преобразований, если определитель матрицы равен нулю (отличен от нуля)? Определитель матрицы с углом нулей.
21. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Определитель произведения матриц.
22. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение. Определитель Вандермонда.
23. Критерий невырожденности квадратной матрицы в терминах ее определителя. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга матрицы в терминах миноров). Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
24. Матричная запись системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
25. Обратная матрица: определение и единственность. Свойства. Критерий существования обратной матрицы. Обоснование метода элементарных преобразований для нахождения обратной матрицы.
26. Явное выражение для элементов обратной матрицы.
27. Бинарные операции. Определение коммутативности, ассоциативности бинарной операции, нейтрального элемента, обратного элемента, обратимого элемента. Примеры. Утверждение об единственности нейтрального элемента. Утверждение об единственности обратного

- элемента. Определение группоида, полугруппы, моноида, группы. Примеры. Определение подгруппы. Примеры. Определение изоморфизма групп. Простейшие свойства.
28. Группа подстановок. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
  29. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Четность. Свойства.
  30. Определение кольца. Определение коммутативного (ассоциативного, с единицей) кольца. Примеры. Простейшие свойства колец. Определение обратимых элементов и делителей нуля. Простейшие свойства. Определение мультипликативной группы ассоциативного кольца.
  31. Определение поля. Примеры. В поле нет делителей нуля. Определение характеристики поля. Свойство характеристики. Определение изоморфизма колец (полей). Простейшие свойства. Определение подкольца, подполя. Примеры. Кольцо вычетов по модулю  $n$ . Утверждение о том, когда кольцо вычетов по модулю  $n$  является полем (без доказательства).
  32. Поле комплексных чисел: аксиоматическое определение, существование и единственность. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.
  33. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Операция сопряжения, ее свойства. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из ненулевого комплексного числа.
  34. Алгебра над полем: определение и примеры. Алгебра многочленов от одной переменной над полем: формальное определение. Степень многочлена. Свойства. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в алгебре многочленов над полем.
  35. Деление с остатком в кольце многочленов над полем.
  36. Многочлены как функции. Разные многочлены над бесконечным полем задают разные функции.
  37. Теорема Безу. Схема Горнера. Корни многочлена, кратность корня. Следствие из теоремы Безу. Число корней с учетом кратности.
  38. Формальная производная многочлена от одной переменной. Свойства. Понижение кратности при дифференцировании многочленов от одной переменной над полем характеристики  $0$ . Определение кратности корня по значениям высших производных. Формула Тейлора.
  39. Теорема об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел (основная теорема алгебры комплексных чисел).
  40. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Комплексные корни многочленов с вещественными коэффициентами. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные множители и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.

- Неприводимые многочлены. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел и полем действительных чисел.
41. Целостное кольцо. Определение деления элемента на элемент. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель (НОД) двух элементов, его единственность. Евклидовы кольца. Существование НОД в евклидовых кольцах, алгоритм Евклида, выражение НОД через исходные элементы.
  42. Простые элементы в целостном кольце. Примеры. Разложение на простые множители в евклидовом кольце.
  43. Поле отношений целостного кольца. Поле рациональных дробей. Однозначность представления рациональной дроби в виде несократимой дроби. Правильная дробь, однозначное представление рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби.
  44. Простейшие дроби. Примеры простейших дробей над полем комплексных чисел и полем вещественных чисел. Теорема о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей.
  45. Алгебра многочленов от нескольких переменных над полем. Степень многочлена от нескольких переменных. Однородные многочлены. В алгебре многочленов от нескольких переменных нет делителей нуля. Разные многочлены от нескольких переменных над бесконечным полем определяют разные функции. Лексикографический порядок. Старший член многочлена. Лемма о старшем члене произведения многочленов.
  46. Определение симметрического многочлена. Лемма о старшем члене симметрического многочлена. Элементарные симметрические многочлены.
  47. Основная теорема о симметрических многочленах. Формулы Виета.
  48. Теорема Декарта.
  49. Дискриминант многочлена. Кубический многочлен с вещественными коэффициентами. Когда его корни вещественны? Дискриминант неполного кубического многочлена.