

## Программа экзамена по алгебре

1-й поток 2-й курс, 2023 г.

(лектор – Куликова О.В.)

1. Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Изоморфизм групп. Простейшие свойства. Примеры. Порядок элемента группы. Свойства.
2. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.
3. Подгруппы. Примеры. Система порождающих. Примеры систем порождающих для  $S_n$ ,  $GL_n(F)$ . Пример не конечно порожденной группы.
4. Отношение сравнимости по модулю подгруппы. Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
5. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядком ядра и образа. Канонический гомоморфизм.
6. Свободная группа. Универсальное свойство свободных групп.
7. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Теорема Дика.
8. Прямое произведение (прямая сумма) групп – внутреннее и внешнее. Их эквивалентность. Теорема о факторизации прямого произведения.
9. Конечно порожденные абелевы группы. Базис. Свободные абелевы группы. Инвариантность ранга. Все свободные абелевы группы одного ранга изоморфны.
10. Подгруппы свободных абелевых групп, их свобода и ранг.
11. Связь между различными базисами свободной абелевой группы. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной абелевой группы. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство существования).
13. Периодическая часть (подгруппа кручения). Разложение конечной абелевой группы в прямую сумму  $p$ -подгрупп, отвечающих различным простым  $p$ .
14. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство единственности).
15. Экспонента конечной группы. Критерий цикличности конечной абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
16. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Группа вращений куба. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Действие группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами. Теорема Кэли. Действие группы на себе сопряжениями. Классы сопряженности и централизаторы. Центр группы. Классы сопряженности и центр группы  $S_n$ .
18. Центр конечной  $p$ -группы. Группы порядка  $p^2$  ( $p$  – простое).
19. Нормализатор подгруппы. Число подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
20. Силоские подгруппы конечной группы. Первая теорема Силова (о существовании).
21. Вторая теорема Силова (о сопряженности). Следствие о нормальных силоских подгруппах.
22. Третья теорема Силова (о количестве).

23. Коммутаторы и коммутант. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы.
24. Системы порождающих групп  $A_n, SL_n(F)$ . Коммутанты групп  $S_n, A_n$ . Коммутанты групп  $GL_n(F)$  и  $SL_n(F)$  при  $|F| > 3$ .
25. Кратные коммутанты. Разрешимые группы. Свойства. При каких  $n$  группа  $S_n$  разрешима?
26. Неразрешимость групп  $GL_n(F)$  и  $SL_n(F)$  ( $|F| > 3$ ). Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем. Разрешимость конечной  $p$ -группы и группы порядка  $pq$ , где  $p, q$  – простые.
27. Простые группы, случай абелевых групп. Композиционный ряд. Существование композиционного ряда у конечной группы. Теорема Жордана-Гельдера (без доказательства).
28. Простота группы  $A_n$  при  $n \geq 5$ . Простота группы  $SO_3(\mathbb{R})$  (без доказательства).
29. Линейные и матричные представления групп, связь между ними. Изоморфизм (эквивалентность) представлений. Инвариантные подпространства. Неприводимые представления. Примеры.
30. Лемма Шура. Неприводимые комплексных линейных представлений абелевых групп, их описание для конечных абелевых групп.
31. Одномерные представления группы. Число одномерных комплексных представлений конечной группы. Одномерные комплексные представления группы  $S_n$ .
32. Сумма линейных представлений. Мономиальное представление группы  $S_n$ , его разложение в сумму неприводимых представлений.
33. Вполне приводимые линейные представления. Пример приводимого, но не вполне приводимого представления. Вполне приводимые представления как суммы неприводимых.
34. Ортогональные (унитарные) вещественные (комплексные) линейные представления групп, их вполне приводимость. Ортогональность (унитарность) любого вещественного (комплексного) представления конечной группы. Следствия. Теорема Машке (общий случай без доказательства).
35. Усреднение линейного отображения по группе. Следствие для матричных элементов неприводимых представлений.
36. Характеры представлений. Свойства характеров. Скалярное произведение на пространстве комплексных функций на группе. Свойство ортогональности характеров.
37. Пространство центральных функций на группе. Характеры неприводимых комплексных представлений конечной группы образуют базис пространства центральных функций.
38. Количество неприводимых комплексных представлений конечной группы. Регулярное представление конечной группы. Кратность вхождения данного неприводимого комплексного представления в регулярное. Сумма квадратов размерностей неприводимых комплексных представлений конечной группы.
39. Комплексные неприводимые представления групп  $S_3$  и  $S_4$ .
40. Кольца. Делители нуля, обратимые элементы. Поля. Подкольца, подполя. Левые, правые идеалы и (двусторонние) идеалы. Факторкольцо кольца. Гомоморфизм колец. Ядро и образ гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме колец.
41. Идеал, порожденный множеством элементов коммутативного кольца. Главные идеалы. Кольца главных идеалов. Идеалы и факторкольца евклидова кольца.
42. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена. Поле из 4 элементов.
43. Конечные расширения полей. Степень расширения. Теорема о башне конечных расширений.

44. Алгебраические и трансцендентные элементы в расширении полей. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Присоединение алгебраического элемента.
45. Алгебраические расширения полей. Конечное расширение является алгебраическим. Расширение, порожденное конечным числом алгебраических элементов, конечно.
46. Алгебраическое замыкание поля в его расширении.
47. Поле разложения многочлена: существование и единственность.
48. Характеристика поля. Число элементов в конечном поле. Эндоморфизм Фробениуса.
49. Существование и единственность поля из  $p^n$  элементов. Существование неприводимого многочлена степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .
50. \*Алгебры: определение и примеры. Алгебра кватернионов. Тела и алгебры с делением. Теорема Фробениуса (без доказательства).