Лекция 8.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

5 октября, 2021

Обобщенная ассоциативность.

Теорема.

Пусть на некотором множестве задана ассоциативная бинарная операция (умножение). Тогда результат произведения $x_1 \dots x_n$ не зависит от расстановки скобок.

Доказательство. Докажем, что результат произведения для любой расстановки скобок совпадает с результатом для стандартной:

$$(\dots(x_1 x_2)x_3)\dots x_n).$$

Индукция по n. База индукции $n = 2$ – только одна расстановка скобок.

Шаг индукции.

Рассмотрим произвольную расстановку скобок. Она имеет вид $(P)(Q)$, где P – расстановка скобок для $x_1 \dots x_k$, а Q – для $x_{k+1}, \dots, x_n$. Для P и Q применимо предположение индукции и расстановку скобок в P и Q можно считать стандартной. Имеем

$$(P)(Q) = (P)(\dots(x_{k+1}x_{k+2})\dots x_n) = (P)(Rx_n) = (PR)x_n.$$

При этом PR – некая расстановка скобок для $x_1 \dots x_{n-1}$ и к ней применимо предположение индукции. То есть PR можно заменить на стандартную расстановку. Но тогда $(PR)x_n$ заменится на стандартную расстановку.

Было

Предложение.

Столбцы матрицы AB – это линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из столбцов матрицы B. Строки матрицы AB – это линейные комбинации строк матрицы B с коэффициентами из строк матрицы A.

Теорема.

$$\mathrm{rk}(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B\}.$$

Определение

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$. Матрица $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}$ называется левой обратной к матрице A, если $BA = E (= E_n)$. Если такая матрица существует, будем говорить, что матрица A обратима слева.

Матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n,m}$ называется правой обратной к матрице A, если $AC = E (= E_m)$. Если такая матрица существует, будем говорить, что матрица A обратима справа.

Теорема.

Левая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = n$. Если $m = n$ и левая обратная к матрице A существует, то она единственна. Правая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = m$. Если $m = n$ и правая обратная к матрице A существует, то она единственна.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу BA. Если $\operatorname{rk} A < n$, то $\operatorname{rk} BA \leq \operatorname{rk} A < n$. Противоречие с тем, что $\operatorname{rk} E_n = n$. Пусть теперь $\operatorname{rk} A = n$. Тогда строки A – это полная система в $\mathbb{R}^n$. Строки матрицы BA – это линейные комбинации строк A с коэффициентами из строк B. Мы можем подобрать i-ю строку B так, чтобы линейная комбинация строк A с такими коэффициентами равнялась $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Если так сделать со всеми строками B, получим $BA = E$.
Если же добавить еще условие $m = n$, то строки A – это не только полная система, но и базис $\mathbb{R}^n$. А значит, строка $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ выражается через них единственным образом. То есть матрица B определена однозначно.
Второе утверждение может быть доказано аналогично.

Замечание.

Если $m \neq n$, то левая/правая обратная (если существует) будет определена не однозначно. Например, левыми обратными к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будут как

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

так и

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица.

Если $m \neq n$, то хотя бы с одной стороны (слева или справа) матрица A не обратима. Рассмотрим случай квадратной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}$.

Теорема.

Пусть $\mathrm{rk}\, A = n$. Тогда левая обратная к A совпадает с правой обратной.

Доказательство. Пусть B – левая обратная к A, а C – правая. Тогда

$$C = EC = (BA)C = B(AC) = BE = B.$$

Определение.

В условиях предыдущей теоремы левая обратная, совпадающая с правой обратной, нзывается <u>обратной матрицей к матрице A</u> и обозначается A^{-1}. Матрица A при этом называется <u>обратимой</u>.

Терминология.

Определение.

Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется <u>невырожденной</u>, если $\mathrm{rk}\, A = n$ и <u>вырожденной</u>, если $\mathrm{rk}\, A < n$.

Переформулировка предыдущей теоремы.

Для квадратной матрицы выполнено

$$\text{обратимая} \Leftrightarrow \text{невырожденная}.$$

Замечание.

Пусть A и B – квадратные матрицы одного размера. Для того, чтобы проверить, что $B = A^{-1}$ достаточно проверить, что B – это левый или правый обратный, то есть либо $AB = E$, либо $BA = E$. Оба равенства проверять не нужно.

Элементарные матрицы.

Определение.

Элементарная матрица (матрица элементарного преобразования) – это матрица, полученная из E одним элементарным преобразованием строк или столбцов.

Теорема.

Пусть матрица S размера $m \times m$ – это матрица элементароного преобразования строк φ. Тогда при умножении матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ на S слева со строками матрицы A происходит элементарное преобразование φ.

Доказательство. Пусть φ ставит на место i-ой строки линейную комбинацию строк старой матрицы с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Тогда, применив φ к единичной матрице, получим в i-ой строке матрицы S $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Теперь умножаем S на A. Строки матрицы SA – это линейная комбинация строк A с коэффициентами из строк S. Таким образом, строки A при умножении на S преобразуются так же, как при φ.

Аналогично доказывается следующее утверждение

Теорема.

Пусть матрица T размера $n \times n$ – это матрица элементароного преобразования столбцо ψ. Тогда при умножении матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ на T справа со стролбцами матрицы A происходит элементарное преобразование ψ.

Алгоритм поиска обратной матрицы.

Пусть нам дана матрица A размера $n \times n$. Наша цель – проверить, обратима ли матрица A и, если да, то найти обратную.
1) приписываем справа к матрице A единичную матрицу такого же размера, получаем матрицу $Z = (A|E)$ размера $n \times 2n$.
2) Делаем элементарные преобразования строк матрицы Z так, чтобы левая часть привелась к улучшенному ступенчатому виду.
3) Если улучшенный ступенчатый вид левой части не E, то матрица A не обратима.
4) Если улучшенный ступенчатый вид A равен E, то получаем матрицу $(E|B)$. При этом $A^{-1} = B$.

Обоснование алгоритма

Если улучшенный ступенчатый вид квадратной матрицы A не единичный, то в нем есть нулевые строки. Это значит, что $\operatorname{rk} A < n$, то есть матрица не обратима.
Пусть теперь улучшенный ступенчатый вид A равен E. При элементарных преобразованиях строк матрица умножается слева на матрицу элементарного преобразования. Так как с обоими частями происходит одинаковое преобразование строк, они умножаются на одинаковые матрицы:

$$(A|E) \to (S_1 A|S_1 E) \to (S_2 S_1 A|S_2 S_1 E) \to \ldots \to \\ \to (S_k \ldots S_1 A|S_k \ldots S_1 E) = (E|B).$$

Получаем, что $B = S_k \ldots S_1$ и $S_k \ldots S_1 A = BA = E$, то есть $B = A^{-1}$

Теорема.

Пусть A, B – квадратные матрицы $n \times n$. Матрица AB обратима тогда и только тогда, когда обратимы обе матрицы A и B. В этом случае $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Если одно из матриц A и B не обратима, то ее ранг меньше n. Тогда ранг AB также меньше n.
Следовательно, AB – не обратима.
Наоборот, если A и B обратимы, то
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, то есть $B^{-1}A^{-1}$ – обратная к AB матрица.

Следствие.

Пусть $A_1, \ldots, A_k$ – матрицы $n \times n$. Тогда $A_1 \ldots A_k$ обратима тогда и только тогда, когда обратимы все A_i. Причем $(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

Лемма. Матрицы A и A^T обратимы/не обратимы одновременно. И $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Доказательство. Так как $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^T$, эти матрицы либо обе обратимы, либо обе не обратимы.
В случае, когда A обратима, рассмотрим

$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E^T = E.$$

Значит, $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Связь с линейными отображениями

Отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, соответствующее единичной матрице (в случае, когда оба базиса совпадают) – это тождественное отображение id. В самом деле, $\varphi(e_i) = e_i$.
Если рассмотрим ту же ситуацию, то есть оба базиса совпадают, то обратным матрицам соответствуют обратные отображения. Пусть A соответствует отображению $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, а B – отображению ψ. То, что $AB = E$ равносильно $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, а $BA = E$ равносильно $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.
В частности отсюда следует, что отображение, обратное к линейному (в случае, когда оно существует), является линейным. Что, конечно, очень легко доказать и без использования матриц.

Лемма.

Матрица, обратная к матрице элементарного преобразования – это матрица обратного элементарного преобразования.

Теорема.

Любая невырожденная матрица может быть разложена в произведение элементарных матриц.

Доказательство. Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Тогда ее можно привести элементарными преобразованиями строк к единичному виду. Получаем $S_k \dots S_1 A = E$. Отсюда $A = (S_k \dots S_1)^{-1} = S_1^{-1} \dots S_k^{-1}$ – произведение элементарных матриц.

Матричная запись СЛУ

СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Может быть записана в матричном виде. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

то СЛУ эквивалентна равенству

$$AX = B.$$

В случае, если A – невырожденная квадратная матрица, получаем $X = A^{-1}B$.