

СООТВЕТСТВИЕ ПРОГРАММЫ КОЛЛОКВИУМА И КОНСПЕКТА.

1) Системы линейных уравнений. Матрица коэффициентов и расширенная матрица коэффициентов. Элементарные преобразования. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования переводят СЛУ в эквивалентную.

Лекция 1: всё до теоремы 1 включительно (с доказательством).

2) Экзотические уравнения. Свободные и главные переменные. Ступенчатый и улучшенный ступенчатый вид. Метод Гаусса решения СЛУ.

Лекция 1: Определения 6, 7, 8, 9. Теорема 1 без доказательства (доказана в прошлом билете). Далее всё до конца лекции (с доказательствами).

Лекция 2: определение 1 и вариация метода Гаусса.

3) Векторное пространство. Простейшие свойства из аксиом. Подпространство. Критерий того, что подмножество является подпространством.

Лекция 2: с Определения 2 до Замечания 2 включительно. С Определения 4 до конца лекции, (с доказательствами там, где они есть).

Лекция 4: Определение 1, Замечание 1, Теорема 1 (с доказательством), Пример 1.

4) Понятие линейной зависимости системы векторов. 3 свойства линейной зависимости.

Лекция 3: С начала и до Определения 3 включительно (с доказательствами там, где они есть).

5) Однородные системы с количеством неизвестных большим количества уравнений. Основная лемма о линейной зависимости.

Лекция 2: Предложение 1 (с доказательством), Определение 3, Замечание 3, Следствие 1.

Лекция 3: Лемма 1 (с доказательством).

6) Решения однородной системы образуют подпространство. Линейная оболочка: определение и доказательство того, что это подпространство.

Лекция 4: Определение 2, Теорема 2 (с доказательством), Теорема 3 (с доказательством).

7) Базис системы векторов: эквивалентность 4 определений. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Дополнение линейно независимой системы до базиса. Выбор базиса из полной системы.

Лекция 4: С Определения 3 до конца лекции. (С доказательствами там, где они есть).

8) Размерность векторного пространства. Ранг матрицы (строчный, столбцовый, ступенчатый), их совпадение. Связь ранга матрицы и размерности линейной оболочки строк/столбцов. Ранг транспонированной матрицы.

Лекция 5: с начала лекции до Определения 5 включительно. (С доказательствами там, где они есть).

9) Свойства ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определённости системы.

Лекция 5: Определение 6, Теорема 3 (с доказательством).

Лекция 6: Теорема 1 (с доказательством), теорема 2 (с доказательством).

10) Фундаментальная система решений и алгоритм её поиска. Размерность пространства решений однородной СЛУ. Структура решений неоднородной СЛУ.

Лекция 6: С Определения 1 и до черты после Предложения 1. (С доказательствами там, где они есть).

11) Линейное отображение. Его матрица в фиксированных базисах. Изоморфизм. Любое конечномерное пространство изоморфно пространству строк.

Лекция 6: С Определения 2 до конца лекции.

Лекция 7: Определение 1, Теорема 1 включительно (с доказательством), Определение 2, Пример 1.

12) Операции над линейными отображениями и над матрицами, связь между ними. Матричная запись СЛУ.

Лекция 7: С Определения 2 и до свойств операций. (Введение операций над матрицами должно объясняться через операции над линейными отображениями.) А также Предложение 1 (с доказательством.)

13) Свойства операций над матрицами. Связь с транспонированием.

Лекция 7: Свойства операций на странице 3, Предложение 1 (без доказательства, его доказательство относится к предыдущему билету), Теорема 2 (с доказательством, достаточно одного доказательства к каждому пункту)

Лекция 8: Теорема 1 (та же, что и теорема 2 из лекции 7, с доказательством), Замечание 2, свойства между Замечанием 2 и Определением 2 (с доказательством), Определение 2, Лемма 1 (с доказательством)

14) Вывод обобщенной ассоциативности для ассоциативной операции.

Лекция 8: Определение 1, Теорема 2 (с доказательством), Замечание 1.

15) Верхние оценки на ранг суммы и произведения матриц. Нижняя оценка на ранг суммы матриц.

Лекция 8: Теорема 3 (с доказательством), Замечание 3, Следствие 1, Лемма 2 (с доказательством), Следствие 2 (с доказательством).

Лекция 9: Лемма 1 (с доказательством), Предложение 1 (с доказательством), Теорема 1 (с доказательством).

16) Правая/левая обратная матрицы. Критерий существования. Обратная матрица, ее единственность и критерий существования.

Лекция 9: Предложение 1 (без доказательства, его доказательство относится к предыдущему билету), Теорема 1 (без доказательства, её доказательство относится к предыдущему билету), Определение 1, Теорема 2 (с доказательством), Следствие 2, Определение 2, Лемма 2 (с доказательством), Следствие 3 (с доказательством), Следствие 4 (с доказательством), Замечание 2, Предложение 2 (с доказательством).

17) Элементарные матрицы. Умножение на элементарные матрицы слева и справа. Матрица, обратная к произведению. Обратная к транспонированной матрице.

Лекция 9: Предложение 3 (с доказательством), Следствие 5 (с доказательством), Определение 3, Лемма 3 (с доказательством), Определение 4, Лемма 4 (с доказательством), Замечание 5.

18) Алгоритм поиска обратной матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных.

Лекция 9: Определение 3, Лемма 3 (без доказательства, её доказательство относится к предыдущему билету), Определение 4, Лемма 4 (без доказательства, её доказательство относится к предыдущему билету), Замечание 5, Алгоритм поиска обратной матрицы (с обоснованием).

Лекция 10: Лемма 1 (с доказательством), Предложение 1 (с доказательством).

19) Подстановки и перестановки. Их количество. Произведение подстановок, его свойства.

Лекция 10: От Определения 1 до Примера 2. (С доказательствами там, где они есть).

20) Разложение подстановки на независимые циклы.

Лекция 10: От Определения 3 до Примера 3. (С доказательствами там, где они есть).

21) Четность перестановки и подстановки. знак подстановки. Изменение четности при умножении на транспозицию. Разложение подстановки на транспозиции. Знак произведения подстановок.

Лекция 10: С определения 5 до конца лекции. (С доказательствами там, где они есть).

Лекция 11: Определение 1, Теорема 1 (с доказательством), Следствие 1 (с доказательством).

22) Четность цикла. Четность произвольной подстановки через декремент.

Лекция 11: Следствие 2 (с доказательством), Определение 2, Теорема 2 (с доказательством), Лемма 1 (с доказательством).

23) Формула определителя квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Линейность и кососимметричность определителя как функции от строк/столбцов.

Лекция 11: Определение 3, Теорема 3 (с доказательством), Лемма 2 (с доказательством), Лемма 3 (с доказательством), Определение 4, Теорема 4 (с доказательством), Определение 5, Теорема 5 (с доказательством).

24) Определитель матрицы с нулевой строкой/столбцом. Определитель матрицы с пропорциональными строками. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов. Определитель треугольной матрицы. Алгоритм вычисления определителя с помощью элементарных преобразований. Эквивалентные условия невырожденности матрицы.

Лекция 11: Определение 4, Теорема 4 (без доказательства, её доказательство относится к предыдущему билету), Следствие 3 (с доказательством), Определение 5, Теорема 5 (без доказательства, её доказательство относится к предыдущему билету), Следствие 4 (с доказательством), Следствие 5 (с доказательством), Предложение 1 (с доказательством), Следствие 6 (с доказательством), Следствие 7 (с доказательством), Теорема 6 (с доказательством), Алгоритм вычисления определителей (с обоснованием), Теорема 7 (с доказательством).