**К лекции 9. Теорема Гамильтона-Кэли.**

Прежде введем одно техническое понятие.

Определение. Матрица $A(\lambda)$ называется $\lambda$- матрицей, если ее элементы являются многочленами от $\lambda$. Любую $\lambda$- матрицу можно записать как многочлен от $\lambda$, коэффициенты которого – числовые матрицы соответствующего размера. Например,

$$A(\lambda)=\begin{Vmatrix}\lambda^2+2\lambda+3 & 4\lambda-1\\ 6\lambda & 5\lambda^2-3\lambda+8\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{Vmatrix}\lambda^2+\begin{Vmatrix}2 & 4\\ 6 & -3\end{Vmatrix}\lambda+\begin{Vmatrix}3 & -1\\ 0 & 8\end{Vmatrix}.$$

Квадратную матрицу $A$ можно подставить в любой многочлен: пусть

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+...+a_{m-1}\lambda+a_m, a_i\in R\Rightarrow f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+...+a_{m-1}A+a_mE.$$

$A$ является корнем многочлена, если $f(A)=0$

***Утверждение.*** Любая квадратная матрица является корнем некоторого ненулевого многочлена.

*Доказательство.* Пусть $A$ матрица порядка n. Матрицы порядка n образуют линейное пространство размерности $n^2$, поэтому любые $n^2+1$ матриц линейно зависимы, т. е. матрицы $E,A,A^2,...,A^{n^2}$ линейно зависимы, значит, существуют такие числа $c_0,...,c_{n^2}$, не все равные 0, что $c_0E+c_1A+...+c_{n^2}A^{n^2}=0$, таким образом,

$$F(A)=0, F(t)=c_0+c_1t+...+c_{n^2}t^{n^2}$$ , ч.т.д.

**Теорема Гамильтона-Кэли**. Любое линейное преобразование является корнем своего характеристического многочлена.

***Матричная формулировка***. Любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.

*Доказательство*. Доказывать будем в матричной формулировке. Пусть $A$ - данная матрица порядка n. Рассмотрим характеристический многочлен

$$\chi(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\sum_{i=0}^{n}p_i\lambda^i,\ p_i\in\mathbb{R}\Rightarrow\chi(A)=\sum_{i=0}^{n}p_iA^i\ (A^0=E)$$

Составим матрицу $D(\lambda)=(d_{ij}(\lambda)), d_{ij}(\lambda)=A_{ji}(\lambda)$, присоединенную к матрице $A-\lambda E$, её элементы – алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы $(A-\lambda E)^T$.

Поскольку $D(\lambda)$ - многочленная матрица степени n-1 по $\lambda$, то $D(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}D_i\lambda^i$, где $D_i$ - числовые матрицы порядка n.

Из формул разложения и фальшивого разложения определителя следует (доказано в 1 семестре), что

$$(A-\lambda E)D(\lambda)=\det(A-\lambda E)E=\chi(\lambda)E\Rightarrow$$

$$\chi(\lambda)E=\sum_{i=0}^{n}p_i\lambda^iE=(A-\lambda E)\sum_{i=0}^{n-1}D_i\lambda^i=\sum_{i=0}^{n-1}AD_i\lambda^i-\sum_{i=0}^{n-1}D_i\lambda^{i+1}=(i+1=k)=$$

$$=(k=i-1)AD_0+\sum_{i=0}^{n-1}(AD_i-D_{i-1})\lambda^i-D_{n-1}\lambda^n$$

Матрицы-многочлены равны, если только равны их соответствующие матричные коэффициенты. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda$, получаем систему равенств:

$$\left|\begin{array}{c} p_0E = AD_0, \\ p_1E = AD_1 - D_0, \\ \dots \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ \dots \\ p_{n-1}E = AD_{n-1} - D_{n-2}, \\ p_nE = -D_{n-1} \end{array}\right.$$ умножим k-е уравнение на $A^k$ при $k = 0,...,n$ и сложим:

$$\begin{array}{r} E\cdot \\ A\cdot \\ \dots + \\ A^k\cdot \\ A^{k+1}\cdot \\ \dots + \\ A^{n-1}\cdot \\ \ \end{array}\left|\begin{array}{c} p_0E = AD_0, \\ p_1E = AD_1 - D_0, \\ \dots \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ p_kE = AD_k - D_{k-1}, \\ \dots \\ p_{n-1}E = AD_{n-1} - D_{n-2}, \\ A^n p_nE = -A^n D_{n-1} \end{array}\right.$$ , получаем $\chi(A)\,E = 0 \Rightarrow \chi(A) = 0$, ч.т.д.