Алгебра, 2 курс

Листок 2

Группы: подгруппы, смежные классы, действие группы на множестве.

Задача 1. Пусть G — группа, $a, b \in G$.

а) Если $a^2 = e$ и $a^{-1}b^2a = b^3$, то $b^5 = e$.

б) Если $a^{-1}b^2a = b^3$, $b^{-1}a^2b = a^3$, то $a = e = b$.

Задача 2. Пусть элементы x и y группы G имеют конечный порядок и $xy = yx$.

а) Докажите, что если порядки элементов x и y взаимно просты, то порядок произведения xy равен произведению их порядков.

б) Верно ли это утверждение для некоммутирующих элементов x и y?

Задача 3. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найдите все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = e$, и все элементы порядка k при:

а) $n = 24$, $k = 4, 6$;

б) $n = 100$, $k = 20, 5$.

Задача 4. Найдите все подгруппы в циклической группе порядка 24; 100.

Задача 5. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

Задача 6. Докажите, что группа, имеющая лишь конечное число подгрупп, конечна.

Задача 7. Найдите все конечные группы, в которых существует наибольшая собственная подгруппа.

Задача 8. 1) Пусть H и K — подгруппы группы G. Тогда $H \cup K$ — подгруппа в том и только в том случае, если либо $H \subseteq K$, либо $K \subseteq H$.

2) Никакая группа G не является объединением $H \cup K$ двух собственных подгрупп $H \subset G$, $K \subset G$.

3) Приведите пример группы G, являющейся объединением трех собственных подгрупп.

Задача 9. Приведите пример неабелевой группы, в которой каждая из собственных подгрупп — циклическая.

Задача 10. Пусть p — простое число, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — группа всех комплексных корней из 1 степени p^n для всех натуральных n. Покажите, что любая собственная подгруппа группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — конечная циклическая группа, а также что любая нетривиальная фактор-группа группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ изоморфна $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. В группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ любое конечное подмножество порождает циклическую группу.

Определение 1. Говорят, что группа G *действует на множестве* M, если задано отображение $\varphi : G \times M \to M$ ($\varphi(g, m)$ для $g \in G$ и $m \in M$ просто записывается как gm), удовлетворяющее следующим двум свойствам:

1) $\forall g, h \in G\ \forall x \in M$ выполнено $(gh)x = g(hx)$;

2) $\forall x \in M$ выполнено $ex = x$.

Задача 11. Являются ли следующие отображения $\varphi : G \times M \to M$ действиями группы G на множестве M:

а) $G = M$ — некоторая группа, $\varphi(g, m) = g \cdot m$ (*левые сдвиги*);

б) $G = M$ — некоторая группа, $\varphi(g, m) = gmg^{-1}$ (*сопряжение*);

в) $G = M$ — некоторая группа, $\varphi(g, m) = mgm^{-1}$;

г) $G = \mathbf{S}_n$, $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $\varphi(\sigma, i) = \sigma(i)$;

д) $G = \mathbf{S}_n$, $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $\varphi(\sigma, i) = \sigma(n - i)$;

е) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$ — поле), $\varphi(A, v) = A(v)$;

ж) G — группа, $M = \{gH \mid g \in G\}$ — множество ее левых смежных классов по некоторой подгруппе H, $\varphi(g_1, g_2H) = (g_1g_2)H$?

Определение 2. *Орбитой* элемента $m \in M$ при действии группы G на этом множестве называется множество $\mathrm{Orb}\,(m) = \{gm \mid g \in G\}$.

Задача 12. Для любых двух элементов $m_1, m_2 \in M$ их орбиты при действии группы G либо совпадают, либо не пересекаются.

Задача 13. Найдите все орбиты группы G невырожденных линейных операторов, действующих на n-мерном векторном пространстве V, если

а) G — группа всех невырожденных линейных операторов;

б) G — группа ортогональных операторов;

в) G — группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ диагональны;

г) G — группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ верхние треугольные.

Определение 3. *Стационарной подгруппой* (или *стабилизатором*) элемента $m \in M$ при действии группы G на это множество называется подгруппа

$$\mathrm{St}\,(m) = \{g \in G \mid gm = m\}.$$

Задача 14. Докажите, что определение 3 корректно, т. е. $\mathrm{St}\,(g)$ является подгруппой в G для любого $g \in G$.

Задача 15. Найдите в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ все орбиты и все стационарные подгруппы для группы G, порожденной подстановкой

а) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{10}$;

б) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{10}$;

в) $g = (1\,6\,9)(2\,10)(3\,4\,5\,7\,8) \in \mathbf{S}_{10}$.

Задача 16 (формула орбит). Докажите, что для любого $m \in M$

$$|G| = \mathrm{St}\,(m) \cdot \mathrm{Orb}\,(m).$$

Определение 4. *Центром* группы G называется множество $\{Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \forall g \in G\}$.

Задача 17. Центр группы является подгруппой.

Задача 18. Найдите центры групп: а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{A}_n$; в) $\mathbf{D}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$.

Определение 5. Орбита элемента $g \in G$ при действии сопряжением группы G на самой себе (см. задачу 11 б) называется *классом сопряженности* элемента g. Стационарная подгруппа элемента $g \in G$ при том же действии называется *централизатором* элемента g.

Задача 19. Докажите, что мощность класса сопряженности любого элемента в группе делит порядок этой группы.

Задача 20. Найдите классы сопряженности групп а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{D}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$; д)* $\mathbf{A}_5$.

Определение 6. Группа G называется *p-группой* (p — некоторое простое число), если любой ее элемент имеет порядок p^k для некоторого $k \geqslant 0$.

Задача 21. Докажите, что центр любой конечной p-группы нетривиален, т. е. содержит больше одного элемента.

Задача 22. Найдите с точностью до изоморфизма все группы из p^2 элементов (p — простое).

Задача 23. Найдите все конечные группы, число классов сопряженности которых равно
а) 1; б) 2; в) 3.

Определение 7. *Централизатором* элемента g группы G называется его стационарная подгруппа при действии сопряжением.

Задача 24. Найдите централизаторы:
а) перестановки $(1\,2)(3\,4)$ в группе $\mathbf{S}_4$;
б) перестановки $(1\,2\,3\ldots n)$ в группе $\mathbf{S}_n$;
в) матрицы $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, все λ_i различны;
г) одной жордановой клетки размера $n \times n$ в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Определение 8. *Нормализатором* подгруппы H группы G называется множество

$$N(H) = \{g \in G \mid \forall h \in H \; ghg^{-1} \in H\}.$$

Задача 25. Докажите, что нормализатор всегда является подгруппой.

Задача 26. Найдите нормализатор $N(H)$ подгруппы H в группе G, если:
а) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, H — подгруппа диагональных матриц;
б) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, H — подгруппа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R};$$

в) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle$.