Алгебра, 2 курс

Листок 3

Гомоморфизмы и нормальные подгруппы. Факторгруппы. Группа движений и группы автоморфизмов

Задача 1. Опишите все гомоморфизмы из группы G в группу H, если
а) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$;
б) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если для любого $h \in H$ и любого $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in H$.

Задача 2. Докажите, что нормальные подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов групп.

Задача 3. Докажите, что подгруппа $\mathbf{V}_4$ нормальна в группе $\mathbf{S}_4$.

Задача 4. Будет ли нормальной подгруппой в группе $\operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где числа a, d нечетны, а числа b, c четны?

Задача 5. Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

Задача 6. Найдите все нормальные подгруппы в группах
а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{D}_4$; д)* $\mathbf{D}_n$; е)* $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 5$.

Задача 7. Пусть подгруппа H нормальна в группе G, а подгруппа K нормальна в группе H. Верно ли, что K нормальна в G?

Задача 8. Докажите, что в абелевой группе все подгруппы нормальны. Верно ли обратное утверждение (если в некоторой группе все подгруппы нормальны, то она абелева)?

Определение 2. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда *фактор-группой* G/H группы G по подгруппе H называется множество $\{gH \mid g \in G\}$ левых смежных классов группы G по подгруппе H с операцией $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$.

Задача 9. Докажите корректность определения 2, а именно, докажите, что множество G/H с введенной операцией является группой тогда и только тогда, когда H нормальна в G.

Задача 10. Найдите фактор-группу G/H группы G по подгруппе H, если
а) $G = \mathbf{S}_n$, $H = \mathbf{A}_n$; б) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \mathbf{V}_4$; в) $G = \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$, $H = \operatorname{SL}_n(\mathbb{K})$, $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}$ — поле.

Задача 11. (*Теорема о гомоморфизме*). Если $\varphi : G \to H$ — сюръективный гомоморфизм групп, то

$$\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Определение 3. Автоморфизм φ группы G называется *внутренним*, если существует $g \in G$ такой, что
$$\forall x \in G\ \varphi(x) = gxg^{-1}.$$

Задача 12. Докажите, что внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов.

Задача 13. Докажите, что группа внутренних автоморфизмов группы G изоморфна факторгруппе группы G по ее центру.

Задача 14. Докажите, что факторгруппа некоммутативной группы по ее центру не может быть циклической.

Задача 15. Докажите, что факторгруппа группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ по ее центру изоморфна группе $\mathbf{S}_4$.

Задача 16*. Докажите, что если H — подгруппа индекса k в группе G, то H содержит некоторую нормальную в G подгруппу, индекс которой в G делит $k!$.

Задача 17*. Докажите, что подгруппа, индекс которой является наименьшим простым делителем порядка группы, нормальна.

Задача 18. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между точками) образуют группу относительно операции композиции.

Задача 19. Докажите, что группа движений квадрата изоморфна группе $\mathbf{D}_4$, введенной на первом занятии.

Определение 4. Группа движений правильного n-угольника обозначается через $\mathbf{D}_n$.

Задача 20. Сколько элементов в группе $\mathbf{D}_n$? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

Задача 21. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна
а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{V}_4$; в) $\mathbb{Z}_3$.

Задача 22. Найдите группы движений и собственных движений
а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г)* икосаэдра.

Определение 5. *Автоморфизмом группы* G называется изоморфизм группы G на себя.

Задача 23. Найдите группы автоморфизмов групп:
а) $\mathbb{Z}_p$, p — простое;
б) $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$;
в) $\mathbf{V}_4$;
г) $\mathbf{S}_3$;
д)* $\mathbf{D}_4$;
е)* $\mathbf{Q}_8$;
ж)** $\mathbf{S}_n$;
з)** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Задача 24. Найдите такие группы G, что $\mathrm{Aut}\, G = \{e\}$.